Technika cyfrowa
Wykład 3

Technika cyfrowa

Dr inż. Janusz Dudziak

Plan wykładu:

- Minimalizacja funkcji boolowskiej
  - Metoda przekształceń formalnych
  - Metoda tablic Karnaugha
  - Metoda Quine'a-McCluskeya

Minimalizacja funkcji boolowskiej

Minimalizacja funkcji boolowskiej

Metody:

- **Metoda przekształceń formalnych**
  - **Metoda intuicyjna**
- **Metody algorytmiczne**
  - **Metoda Karnaugha**
  - **Metoda Quine'a-McCluskeya**
  - **Metoda Espresso**

Metoda Karnaugha

Tablica Karnaugha jest prostokątem złożonym z 2^n kratek, z których każda reprezentuje jeden pełny iloczyn (minterm) zmiennych binarnych.

$$f = \sum 2,3,6_{x_1x_2x_3} + \sum_{\Phi} 0_{x_1x_2x_3}$$

	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	-
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

x_1x_2 \ x_3	0	1
00	-	0
01	1	1
11	1	0
10	0	0

Dla uzyskania efektu sąsiedztwa współrzędne pól opisuje się kodem Gray'a

W pola wpisuje się wartości funkcji

Metoda Karnaugha

x_1 \ x_2x_3	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

$$f = \sum 2,3,6_{\,x_1x_2x_3} + \sum_{\Phi} 0_{\,x_1x_2x_3}$$

x_1 \ x_2x_3	00	01	11	10
0	-	0	1	1
1	0	0	0	1

Metoda Karnaugha

x_1 \ x_2x_3	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

$x_1x_2x_3$ \ x_4x_5	00	01	11	10
000	0	1	3	2
001	4	5	7	6
011	12	13	15	14
010	8	9	11	10
110	24	25	27	26
111	28	29	31	30
101	20	21	23	22
100	16	17	19	18

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

Metoda Karnaugha -sklejanie

1) Zapisujemy funkcję do tablicy.

2) Zakreślamy sąsiadujące obszary

a) zakreślamy grupy sąsiadujących kratek zawierających 1-ki albo 1-ki i „–” (kreski).

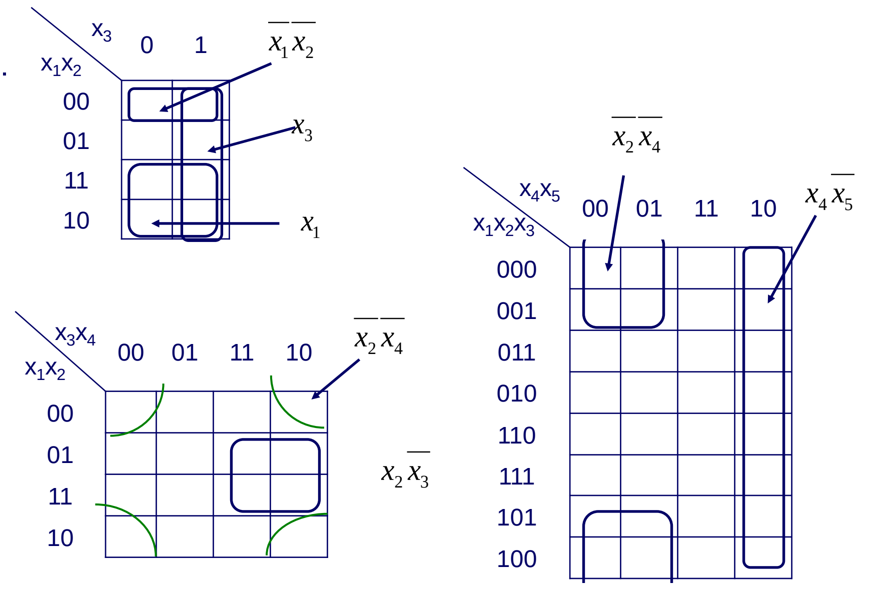
b) Liczba kratek zakreślonych musi 2^k.

c) Staramy się objąć pętlą jak największą liczbę kratek.

3) Zakreślamy obszary tak długo, aż każda 1-ka będzie objęta co najmniej jedną pętlą, pamiętając o tym aby pokryć wszystkie 1-ki możliwie minimalną liczbą pętli.

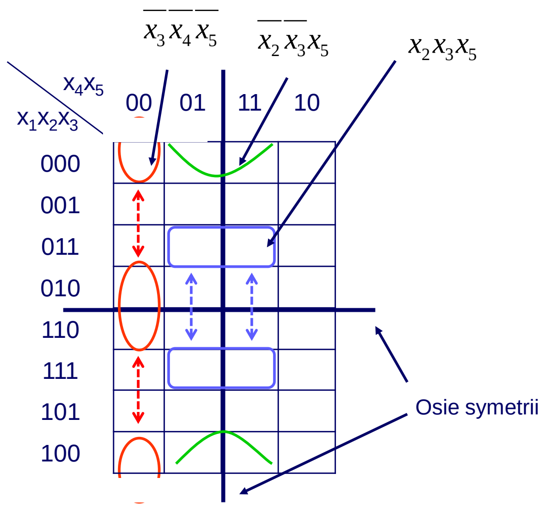
4) Z każdym zakreśleniem kojarzymy iloczyn zmiennych prostych lub zanegowanych. Suma tych iloczynów, to minimalne wyrażenie boolowskie danej funkcji.

Metoda Karnaugha -sklejanie



Metoda Karnaugha -sklejanie

.



Metoda Karnaugha -sklejanie

. **Implikant** danej funkcji f jest to iloczyn literałów (zmiennych prostych i zanegowanych) o następującej własności: dla wszystkich kombinacji wartości zmiennych, dla których implikant jest równy jedności, również funkcja f jest równa jedności.

implikant prosty jest to implikant, który zmniejszony o dowolny literał przestaje być implikantem.

Metoda Karnaugha -sklejanie

implikant prosty odpowiada grupie jedynek (i kresek), której nie można powiększyć.

x_2x_4

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	0	0	-	1
01	1	1	1	0
11	0	1	-	0
10	0	0	1	0

$x_1x_2x_4$

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	0	0	-	1
01	1	1	1	0
11	0	1	-	0
10	0	0	1	0

Metoda Karnaugha -sklejanie

$f = \Sigma[0, 5, 6, 7, 10] + \Sigma_{\Phi} (2, 3, 11, 12)$

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	1	0	–	–
01	0	1	1	1
11	–	0	0	0
10	0	0	–	1

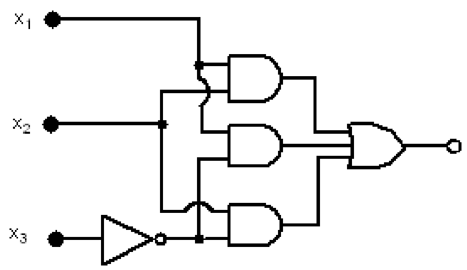
$$f = \bar{x}_1x_3 + \bar{x}_2x_3 + \bar{x}_1x_2x_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4$$

Metoda Karnaugha –realizacja AND-OR

$$f = \sum 2,4,6,7_{x_1 x_2 x_3}$$

x_1x_2 \ x_3	0	1
00	0	0
01	1	0
11	1	1
10	1	0

$$y = x_1x_2 + x_1\bar{x}_3 + x_2\bar{x}_3$$

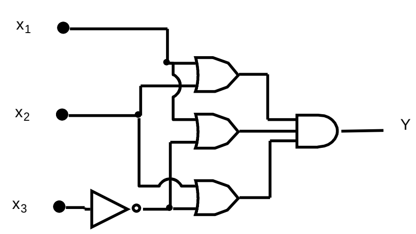


Metoda Karnaugha –realizacja OR-AND

$$f = \sum 2,4,6,7_{x_1 x_2 x_3}$$

x_1x_2 \ x_3	0	1
00	0	0
01	1	0
11	1	1
10	1	0

$$y = (x_1 + x_2)(x_1 + \bar{x}_3)(x_2 + \bar{x}_3)$$



Metoda Karnaugha –realizacja NAND

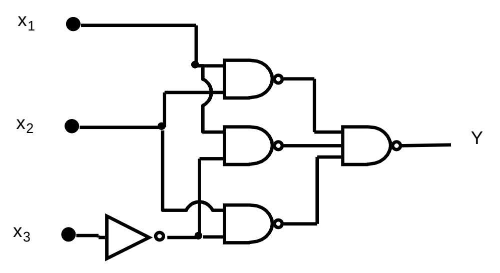
$$f = \sum 2,4,6,7_{x_1x_2x_3}$$

x_1x_2 \ x_3	0	1
00	0	0
01	1	0
11	1	1
10	1	0

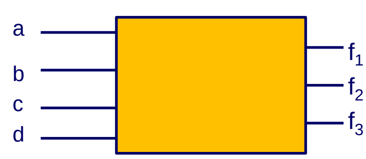
$$y = x_1x_2 + x_1\bar{x}_3 + x_2\bar{x}_3$$

$$y = \overline{\overline{x_1x_2 + x_1\bar{x}_3 + x_2\bar{x}_3}}$$

$$y = \overline{\overline{x_1x_2} \cdot \overline{x_1\bar{x}_3} \cdot \overline{x_2\bar{x}_3}}$$



Metoda Karnaugha



$f_1 = \Sigma(3,7,11,14,15)$
$f_2 = \Sigma(3,7,12,13,14,15)$
$f_3 = \Sigma(3,7,11,12,13,15)$

ab \ cd	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	0	1	0
11	0	0	1	1
10	0	0	1	0

ab \ cd	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	0	1	0
11	1	1	1	1
10	0	0	0	0

ab \ cd	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	0	1	0
11	1	1	1	0
10	0	0	1	0

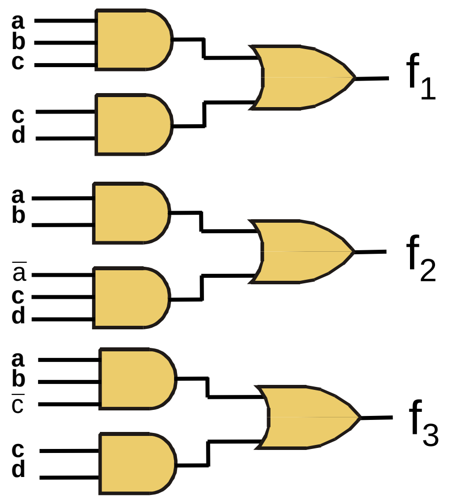
$f_1 = abc + cd$ $\quad f_2 = ab + \bar{a}cd$ $\quad f_3 = ab\bar{c} + cd$

Metoda Karnaugha

$f_1 = \Sigma(3,7,11,14,15)$

$f_2 = \Sigma(3,7,12,13,14,15)$

$f_3 = \Sigma(3,7,11,12,13,15)$

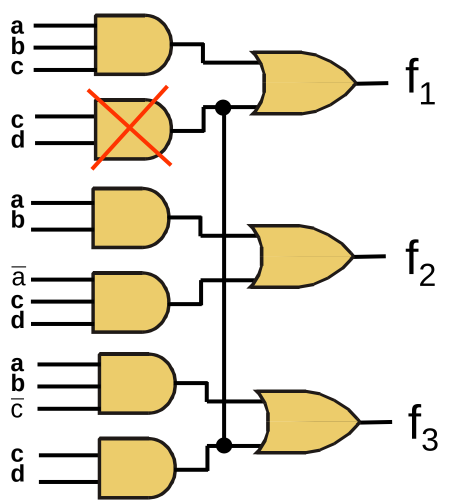


Metoda Karnaugha

$f_1 = \Sigma(3,7,11,14,15)$

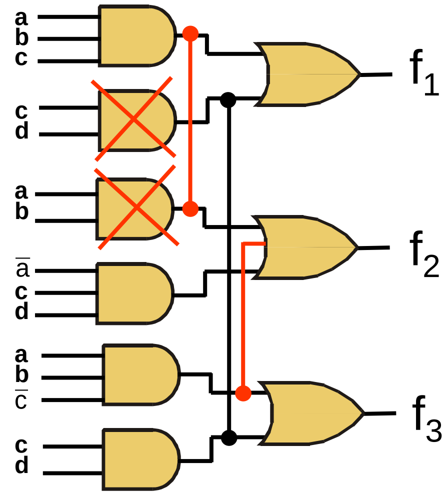
$f_2 = \Sigma(3,7,12,13,14,15)$

$f_3 = \Sigma(3,7,11,12,13,15)$



Metoda Karnaugha

$f_1 = \Sigma(3,7,11,14,15)$
$f_2 = \Sigma(3,7,12,13,14,15)$
$f_3 = \Sigma(3,7,11,12,13,15)$

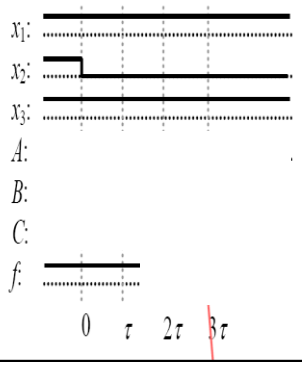


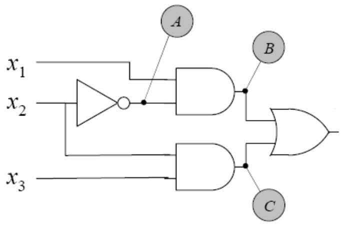
Metoda Karnaugha –hazard statyczny

$$f = \sum(7,5,4,3)$$

$$f = x_1\overline{x_2} + x_2x_3$$

x_1 \ x_2x_3	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	1	1	1	0

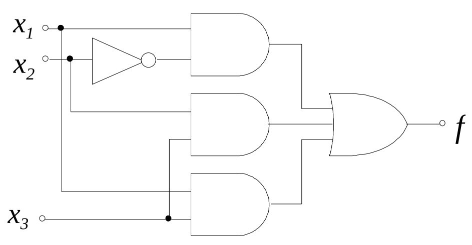




HAZARD STATYCZNY – zakłócenie na wyjściu układu kombinacyjnego powstające wskutek różnicy w czasie przejścia sygnału po dwóch różnych drogach. Hazard może pojawić się, jeśli zmianie sygnału na wejściu odpowiada przejście pomiędzy dwiema stykającymi się grupami zer / jedynek w tabeli Karnaugh

Metoda Karnaugha –hazard statyczny

x_1 \ x_2x_3	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	1	1	1	0



$$f = x_1\overline{x_2} + x_2x_3 + x_1x_3$$

Minimalizacja funkcji boolowskiej

Minimalizacja funkcji boolowskiej

Metody:

- **Metoda przekształceń formalnych**
  - **Metoda intuicyjna**
- **Metody algorytmiczne**
  - **Metoda Karnaugha**
  - **Metoda Quine'a-McCluskey'a**
  - **Metoda Espresso**

Metoda Quine'a McCluskey'a

1. Wszystkie pełne iloczyny (sumy) postaci kanonicznej zamienia się na postać dziesiętną
2. Każdej liczbie przypisuje się indeks = liczbie jedynek w zapisie binarnym
3. Wypisuje się liczby w kolumnie z podziałem na grupy względem indeksów z p.2.
4. Tworzy się następną kolumnę z pierwszej w wyniku sklejania
   1. Skleja się liczby z grup sąsiednich
   2. Sklejane liczby muszą się różnić o 2^k
   3. Skleja się liczby, gdy liczba z kolejnej grupy jest większa
   4. Wynik sklejania a i b zapisuje się a,b(c),gdzie c=b-a, obie liczby zaznacza się ✓
   5. Każda liczba może być sklejona dowolną ilość razy
   6. Należy wypisać wszystkie możliwe sklejenia
   7. Wyniki sklejeń sąsiednich grup tworzą rozłączne grupy
   8. Wyrażeń identycznych nie wypisuje się
5. Kolejne kolumny buduje się wg zasad analogicznych (p.4) z tym, że liczby w nawiasie muszą być jednakowe

Metoda Quine'a McCluskey'a

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sum(0,5,8,13,16,21,24,29)$$

0	0
1	8
	16
2	5
	24
3	13
	21
4	29

Metoda Quine'a McCluskey'a

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sum(0,5,8,13,16,21,24,29)_{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5}$$

0	0	✓
1	8	✓
	16	
2	5	
	24	
3	13	
	21	
4	29	

Metoda Quine'a McCluskey'a

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sum(0,5,8,13,16,21,24,29)$$

0	0	✓	0,8 (8)
1	8	✓	
	16		
2	5		
	24		
3	13		
	21		
4	29		

Metoda Quine'a McCluskey'a

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sum(0,5,8,13,16,21,24,29)$$

0	0	✓ ✓	0,8 (8)
1	8	✓	0,16 (16)
	16	✓	
2	5		
	24		
3	13		
	21		
4	29		

Metoda Quine'a McCluskey'a

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sum(0,5,8,13,16,21,24,29)$$

0	0	✓ ✓	0,8 (8)
1	8	✓ ✓	0,16 (16)
	16	✓	8,24 (16)
2	5		
	24	✓	
3	13		
	21		
4	29		

Metoda Quine'a McCluskey'a

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sum(0,5,8,13,16,21,24,29)$$

0	0	✓✓	0,8 (8)
1	8	✓✓	0,16 (16)
	16	✓✓	8,24 (16)
2	5		16,24(8)
	24	✓✓	
3	13		
	21		
4	29		

Metoda Quine'a McCluskey'a

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sum(0,5,8,13,16,21,24,29)$$

0	0	✓✓	0,8 (8)
1	8	✓✓	0,16 (16)
	16	✓✓	8,24 (16)
2	5	✓✓	16,24(8)
	24	✓✓	5,13 (8)
3	13	✓✓	5,21 (16)
	21	✓✓	13,29 (16)
4	29	✓✓	21,29 (8)

Metoda Quine'a McCluskey'a

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sum(0,5,8,13,16,21,24,29)$$

0	0	✓ ✓	0,8 (8) ✓	0,8,16,24 (8,16)
1	8	✓ ✓	0,16 (16) ✓	5,13,21,29 (8,16)
	16	✓ ✓	8,24 (16) ✓	
2	5	✓ ✓	16,24(8) ✓	
	24	✓ ✓	5,13 (8) ✓	
3	13	✓ ✓	5,21 (16) ✓	
	21	✓ ✓	13,29 (16) ✓	
4	29	✓ ✓	21,29 (8) ✓	

Metoda Quine'a McCluskey'a

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sum(0,5,8,13,16,21,24,29)$$

0	0	✓ ✓	0,8 (8) ✓	0,8,16,24 (8,16)
1	8	✓ ✓	0,16 (16) ✓	5,13,21,29 (8,16)
	16	✓ ✓	8,24 (16) ✓	
2	5	✓ ✓	16,24(8) ✓	
	24	✓ ✓	5,13 (8) ✓	
3	13	✓ ✓	5,21 (16) ✓	
	21	✓ ✓	13,29 (16) ✓	
4	29	✓ ✓	21,29 (8) ✓	

	0	5	8	13	16	21	24	29
0,8,16,24 (8,16)	✓		✓		✓		✓	
5,13,21,29 (8,16)		✓		✓		✓		✓
	*	*	*	*	*	*	*	*

0 $\Rightarrow$ 00000 $\Rightarrow$ --000 $\Rightarrow$ $\overline{x_3}\,\overline{x_4}\,\overline{x_5}$

5 $\Rightarrow$ 00101 $\Rightarrow$ --101 $\Rightarrow$ $x_3\overline{x_4}x_5$

$$f = \overline{x_3}\,\overline{x_4}\,\overline{x_5} + x_3\overline{x_4}x_5$$

Metoda Quine'a McCluskey'a

- Wyrażenia, których nie udało się skleić odpowiadają prostym implikantom (implicentom)
- Sprawdzenie, czy jest to postać minimalna – buduje się tablicę, wiersze opisują wyrażenia, których nie udało się skleić, kolumny – składniki postaci kanonicznej.
- Zaznaczamy w wierszach kolumny, które pochłaniają implikanty, następnie wybiera się minimalną ilość implikantów, które pokrywają wszystkie kolumny
- Wyrażenie postaci minimalnej tworzy się w sposób nastepujący:
  - Wypisuje się w postaci binarnej pierwszą liczbę wyrażenia odpowiadajacego implikantowi (implicentowi)
  - Na pozycjach odpowiadających liczbom w nawiasie pisze się kreski
  - Poszczególnym zerom lub jedynkom przyporządkowuje się zmienne zanegowane lub proste

Metoda Quine'a McCluskey'a

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sum(0,1,4,5,26,27,30,31)_{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5} + \sum\nolimits_{\Phi}(10,11,14,15)_{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5}$$

0	0	0,1(1)	**0,1,4,5 (1,4)**	**10,11,26,27,14,30,15,31 (1,16,4)**
1	1	0,4 (4)	10,11,26,27 (1,16) ✓	
	4	1,5 (4)	10,11,14,15 (1,4) ✓	
2	5	4,5(1)	10,14,26,30 (4,16) ✓	
	10	10,11 (1)	26,30,27,31 (1,4) ✓	
3	26	10,14 (4)	11,27,15,31 (4,16) ✓	
	14	10,26 (16)	14,30,15,31 (1,16) ✓	
	11	26,30 (4)		
4	30	26,27 (1)		
	27	11,27 (16)		
	15	14,30 (16)		
5	31	14,15 (1)		
		11,15 (4)		
		30,31 (1)		
		27,31 (4)		
		15,31 (16)		

0 $\Rightarrow$ 00000 $\Rightarrow$ 00-0- $\Rightarrow$ $\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_4$

10 $\Rightarrow$ 01010 $\Rightarrow$ -1-1- $\Rightarrow$ x_2x_4

$$\boxed{f = x_2x_4 + \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_4}$$