Technika cyfrowa
Wykład 2

Technika cyfrowa

Dr inż. Janusz Dudziak

Plan wykładu:
- Konstruowanie wyrażenia kanonicznego sumy i wyrażenia kanonicznego iloczynu
- Zapis skrócony wyrażenia kanonicznego sumy i wyrażenia kanonicznego iloczynu
- Funkcje bulowskie niezupełne
- Pojęcie systemu funkcjonalnie pełnego
- Minimalizacja funkcji boolowskiej
  - Metoda przekształceń formalnych
  - Metoda tablic Karnaugha
  - Metoda Quine'a-McCluskeya

Algebra Boole'a
funkcje boolowskie

Definicja. *Funkcją boolowską* lub *funkcją przełączającą* $f(x_1,\ldots,x_n)$ nazywamy każde odwzorowanie

$$f : D^n \rightarrow \{0,1\}$$

gdzie dziedzina funkcji $D^n \subseteq \{0,1\}^n = \{0,1\}\times\{0,1\}\times \ldots \times \{0,1\}$

Ponieważ zbiór $\{0,1\}^n$ ma 2^n elementów a zbiór $\{0,1\}$ dwa elementy to:
Twierdzenie. Istnieje 2^{2^n} funkcji przełączających n zmiennych

Dla funkcji boolowskich zdefiniowane są operacje +, $\cdot$, oraz $\bar{\ }$.

$D^n = \{0,1\}^n \Leftrightarrow f$ nazywamy *funkcją zupełną*.
$D^n \subset \{0,1\}^n \Leftrightarrow f$ nazywamy *funkcją niezupełną*.
W praktyce funkcje niezupełne występują często, np. gdy niektóre kombinacje wejściowe w pracy układu nie pojawiają się. Fakt ten wykorzystuje się przy minimalizacji (upraszczaniu) układu cyfrowego.

Algebra Boole'a
funkcje boolowskie

Funkcję boolowską można przedstawić w formie tzw *tablicy prawdy*

Przykład 1.
Mamy funkcję $f(x_1, x_2, x_3)$ zdefiniowaną poniżej

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Algebra Boole'a
funkcje boolowskie

Funkcję boolowską można przedstawić w formie tzw *tablicy prawdy*

Przykład 2. Tablica prawdy ***funkcji niezupełnej*** .

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	-
1	0	0	1
1	0	1	-
1	1	0	-
1	1	1	1

Algebra Boole'a
funkcje boolowskie

W praktyce *funkcje boolowskie* reprezentowane są przez *wyrażenia boolowskie*.

Zwykle istnieje wiele wyrażeń boolowskich reprezentujących tę samą funkcję. Jeżeli $x_1,\dots,x_n$ są zmiennymi boolowskimi to wyrażenie boolowskie będące konkatenacją wszystkich zmiennych lub ich negacji nosi nazwę ***iloczynu elementarnego***. (np. dla n=3 $\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}$, $\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3$)

Podobnie wyrażenie boolowskie będące sumą wszystkich zmiennych lub ich negacji nosi nazwę ***sumy elementarnej***. (np. dla n=3 $\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3}$, $\overline{x_1} + x_2 + x_3$)

Jedna wyróżniona forma zapisu wyrażenia nosi nazwę *postaci kanonicznej*. Istnieją dwie równoważne postaci kanoniczne: kanoniczna postać sumy

$$f(x_1,\dots,x_n) = \Sigma_{i \in I_1} P_i$$

oraz kanoniczna postać iloczynu:

$$f(x_1,\dots,x_n) = \Pi_{i \in I_0} S_i$$

gdzie I_1 i I_0 są zbiorami tych indeksów, dla których $f(x_1,\dots,x_n)$ przyjmuje odpowiednio wartość 1 lub wartość 0, P_i są iloczynami elementarnymi a S_i elementarnymi sumami.

Algebra Boole'a
funkcje boolowskie

sposób konstruowania wyrażenia kanonicznego sumy uzasadnia twierdzenie Shannona

Dowolna funkcje boolowską f(x_1,...,x_n) można przedstawić w postaci:

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, ..., x_n) = {} & f(1,1,1,...,1)x_1 x_2 ... x_n + \\
& + f(0,1,1,...,1)\overline{x_1} x_2 ... x_n + \\
& + f(1,0,1,...,1)x_1 \overline{x_2} ... x_n + \\
& + f(0,0,1,...,1)\overline{x_1}\,\overline{x_2} ... x_n + \\
& + ... \\
& + f(0,0,0,...,0)\overline{x_1}\,\overline{x_2} ... \overline{x_n}
\end{aligned}
$$

Algebra Boole'a
funkcje boolowskie

Podobnie jest dla wyrażenia kanonicznego iloczynu

Dowolna funkcje boolowską f(x_1,...,x_n) można przedstawić w postaci:

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, ..., x_n) = {} & [f(1,1,1,...,1) + \overline{x_1} + \overline{x_2} + ... + \overline{x_n}] \\
& \cdot [f(0,1,1,...,1) + x_1 + \overline{x_2} + ... + \overline{x_n}] \cdot \\
& \cdot [f(1,0,1,...,1) + \overline{x_1} + x_2 + ... + \overline{x_n}] \cdot \\
& \cdot [f(0,1,1,...,1) + x_1 + x_2 + ... + \overline{x_n}] \cdot \\
& \cdot ... \\
& \cdot [f(0,0,0,...,0) + x_1 + x_2 + ... + x_n]
\end{aligned}
$$

Algebra Boole'a

funkcje boolowskie

Przykład

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Funkcję boolowską przedstawioną wyżej opisuje odpowiadające jej wyrażenie kanoniczne sumy.

$f(x,y,z)=0\cdot\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + 0\cdot\overline{x}_1\overline{x}_2x_3 + 1\cdot\overline{x}_1x_2\overline{x}_3 + 0\cdot\overline{x}_1x_2x_3 + 1\cdot x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + 1\cdot x_1\overline{x}_2x_3 + 0\cdot x_1x_2\overline{x}_3$
$+ 1\cdot x_1x_2x_3$

$f(x,y,z)=\overline{x}_1x_2\overline{x}_3 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + x_1\overline{x}_2x_3 + x_1x_2x_3$

Algebra Boole'a

funkcje boolowskie

Przykład

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

lub równoważne mu wyrażenie kanoniczne iloczynu

$f(x,y,z)=(x_1+x_2+x_3)(x_1+x_2+\overline{x}_3)(x_1+\overline{x}_2+\overline{x}_3)(\overline{x}_1+\overline{x}_2+x_3)$

Algebra Boole'a
funkcje boolowskie

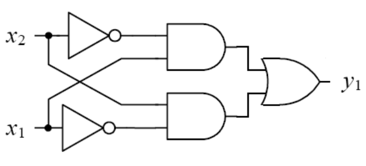
Przykład XOR

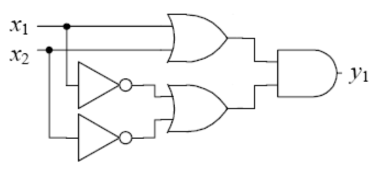
x_1	x_2	y_1
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$y_1 = x_1\overline{x_2} + \overline{x_1}x_2$$

x_1	x_2	y_1
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$y_1 = (x_1 + x_2)(\overline{x_1} + \overline{x_2})$$



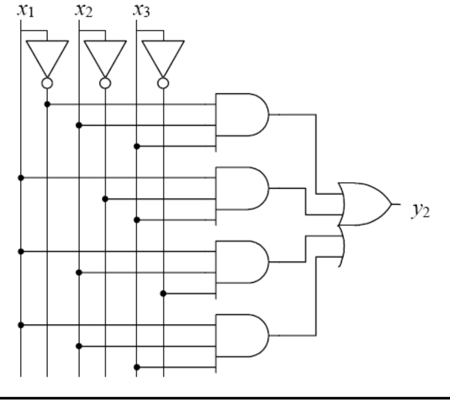


Algebra Boole'a
funkcje boolowskie

Przykład

x_1	x_2	x_3	y_2
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$y_2 = \overline{x_1}x_2x_3 + x_1\overline{x_2}x_3 + x_1x_2\overline{x_3} + x_1x_2x_3$$

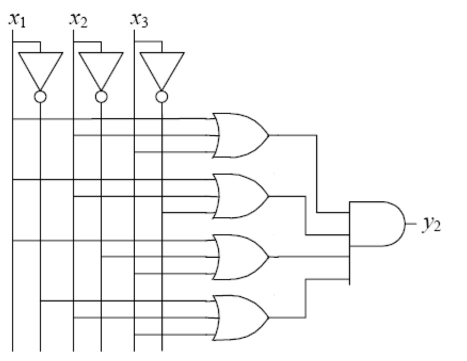


Algebra Boole’a
funkcje boolowskie

Przykład

x_1	x_2	x_3	y_2
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$y_2 = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + \overline{x_3})(x_1 + \overline{x_2} + x_3)(\overline{x_1} + x_2 + x_3)$$

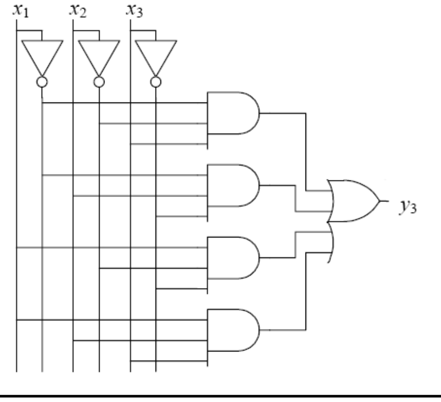


Algebra Boole’a
funkcje boolowskie

Przykład

x_1	x_2	x_3	y_3
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$$y_3 = \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} + \overline{x_1}\,\overline{x_2} x_3 + x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3} + x_1 x_2 x_3$$



Algebra Boole'a
funkcje boolowskie

Zapis skrócony

Postać kanoniczna sumy

x_1	x_2	x_3	y_1	bin	dzies
0	0	0	0	000	0
0	0	1	0	001	1
0	1	0	0	010	2
0	1	1	1	011	3
1	0	0	0	100	4
1	0	1	1	101	5
1	1	0	1	110	6
1	1	1	1	111	7

$$y_2 = \overline{x_1}x_2x_3 + x_1\overline{x_2}x_3 + x_1x_2\overline{x_3} + x_1x_2x_3 =$$
$$= \sum(011,101,110,111)_{x_1,x_2,x_3} = \sum(3,5,6,7)_{x_1,x_2,x_3}$$

$$y_2 = \sum(3,5,6,7)_{x_1,x_2,x_3}$$

Postać kanoniczna iloczynu

x_1	x_2	x_3	y_1	bin	dzies
0	0	0	0	000	0
0	0	1	0	001	1
0	1	0	0	010	2
0	1	1	1	011	3
1	0	0	0	100	4
1	0	1	1	101	5
1	1	0	1	110	6
1	1	1	1	111	7

$$y_2 = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + \overline{x_3})(x_1 + \overline{x_2} + x_3)(\overline{x_1} + x_2 + x_3) =$$
$$= \prod(0,1,2,4)_{x_1,x_2,x_3}$$

$$y_2 = \prod(0,1,2,4)_{x_1,x_2,x_3}$$

Algebra Boole'a
funkcje boolowskie

Zapis skrócony

4-bitowy generator bitu parzystości:

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3, \mathrm{x}_4) = \sum(0001, 0010, 0100, 0111, 1000, 1011, 1101, 1110) =$$
$$\sum(1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14)_{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3, \mathrm{x}_4}$$
$$\mathrm{f}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3, \mathrm{x}_4) = \prod(0000, 0011, 0101, 0110, 1001, 1010, 1100, 1111) =$$
$$\prod(0, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15)_{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3, \mathrm{x}_4}$$

Zauważmy

$$f(a,b,c,\ldots,x) = \sum K_{i,k}^{(1)} = \prod K_{\bar{i},\bar{k}}^{(0)}$$

gdzie

$K^{(1)}$ - elementarny iloczyn

$K^{(0)}$ - elementarna suma

i,k - numery porządkowe

funkcje boolowskie

Funkcje niezupełne

	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	-
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	-
7	1	1	1	1

-

	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
7	1	1	1	1

Gdy funkcja jest niezupełna (występuja stany nieokreślone) stosuje się zapis

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum(1,3,5,7)_{x_1,x_2,x_3} + \sum_{\Phi}(2,6)_{x_1,x_2,x_3}$$

Lub analogicznie $f(x_1, x_2, x_3) = \prod(0,4)_{x_1,x_2,x_3} + \prod_{\Phi}(2,6)_{x_1,x_2,x_3}$

funkcje boolowskie system funkcjonalnie pełny

Definicja

Zbiór funkcji boolowskich nazywamy systemem funkcjonalnie pełnym, jeśli dowolna funkcja boolowska daje się przedstawić jako superpozycja funkcji tego zbioru oraz stałych 0 i 1.

Przykłady:

1. **{NOT, AND, OR}**
2. **{NOT, AND}** $\qquad (a+b) = \overline{\overline{a} \cdot \overline{b}}$ (z prawa deMorgana)
3. **{NOT, OR}**
4. **{NAND}**
5. **{NOR}**

Minimalizacja funkcji boolowskiej

Minimalizacja funkcji boolowskiej

Minimalizacja funkcji boolowskiej

Cel minimalizacji: realizacja danej funkcji boolowskiej

za pomocą minimalnej ilości sprzętu.

Kryteria:
- minimalna liczba bramek
- bramki z ograniczonego zbioru (np. tylko NAND i NOR...)
- unikanie bramek wielowejściowych
- minimalizacja liczby układów scalonych
- specyficzne uwarunkowania technologiczne

Minimalizacja funkcji boolowskiej

Minimalizacja funkcji boolowskiej

Metody:

- **Metoda przekształceń formalnych**
  - **Metoda intuicyjna**
- **Metody algorytmiczne**
  - **Metoda Karnaugha**
  - **Metoda Quine'a-McCluskeya**
  - **Metoda Espresso**

Minimalizacja funkcji boolowskiej

Metoda przekształceń formalnych

	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

$$f = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 + \bar{x}_1x_2x_3 + x_1\bar{x}_2x_3 + x_1x_2\bar{x}_3 + x_1x_2x_3 =$$

$$\sum 1,3,5,6,7_{x_1x_2x_3}$$

Minimalizacja funkcji boolowskiej

Metoda przekształceń formalnych

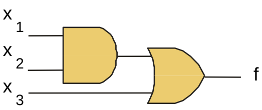
$$f = \sum 1,3,5,6,7_{x_1x_2x_3} =$$

$$= \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 + \bar{x}_1x_2x_3 + x_1\bar{x}_2x_3 + x_1x_2\bar{x}_3 + x_1x_2x_3 =$$

$$= \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 + \bar{x}_1x_2x_3 + x_1\bar{x}_2x_3 + x_1x_2\bar{x}_3 + x_1x_2x_3 + x_1x_2x_3 =$$

$$= \bar{x}_1x_3(\bar{x}_2 + x_2) \quad + x_1x_3(\bar{x}_2 + x_2) \quad + x_1x_2(\bar{x}_3 + x_3) =$$

$$= \bar{x}_1x_3 + x_1x_3 + x_1x_2 = x_3(\bar{x}_1 + x_1) + x_1x_2 = x_3 + x_1x_2$$

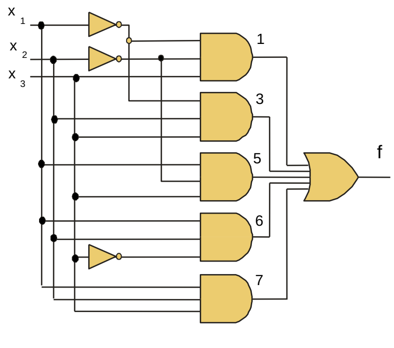


Minimalizacja funkcji boolowskiej

Minimalizacja – sens techniczny

$$f = \sum 1,3,5,6,7_{x_1x_2x_3}$$

$$f = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 + \bar{x}_1x_2x_3$$
$$+ x_1\bar{x}_2x_3 + x_1x_2\bar{x}_3 + x_1x_2x_3$$



$$f = x_3 + x_1x_2$$