

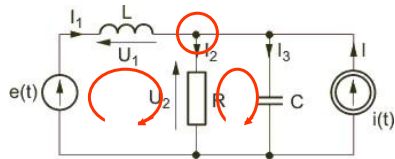
# **Podstawy elektroniki, elektrotechniki i miernictwa**

## Wykład 7 Podstawy teorii obwodów

### **Podstawy elektroniki, elektrotechniki i miernictwa**

- Analiza złożonych obwodów RLC w stanie ustalonym
- Metoda potencjałów węzłowych
- Metoda prądów oczkowych
- Analiza złożonych obwodów RLC. Zasada superpozycji
- Analiza złożonych obwodów RLC w stanie ustalonym przy wymuszeniu niesinusoidalnym
- Analiza obwodów RLC w stanie nieustalonym

## Analiza złożonych obwodów RLC w stanie ustalonym



$$R = 2\Omega; \quad C = 0,5F; \quad L = 1H$$

$$e(t) = 10\sqrt{2} \sin \omega t; \quad i(t) = 5 \sin(\omega t - 45^\circ); \quad \omega = 1 \text{ rad/s}$$

$$E = 10e^{j0}; \quad I = \frac{5}{\sqrt{2}} e^{-j45^\circ}$$

Równania Kirchhoffa

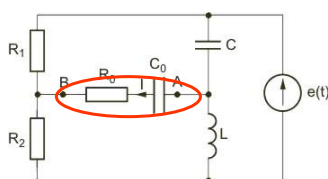
$$\begin{aligned} E - Z_L I_1 - R I_2 &= 0 & \Rightarrow & 10 = jI_1 + 2I_2 \\ I + I_1 - I_2 - I_3 &= 0 & \Rightarrow & I_1 - I_2 - I_3 = -\frac{5}{\sqrt{2}} e^{-j45^\circ} \\ I_2 R - Z_C I_3 &= 0 & \Rightarrow & 2I_2 + j2I_3 = 0 \end{aligned}$$

$$I_1 = 10 + j5 = 11,18 e^{j26,5^\circ} \qquad U_1 = 11,18 e^{j116,5^\circ}$$

$$I_2 = 7,5 - j5 = 9,01 e^{-j33,7^\circ} \qquad U_2 = 18,2 e^{-j33,7^\circ}$$

$$I_3 = 5 + j7,5 = 9,01 e^{j56,3^\circ}$$

## Analiza złożonych obwodów RLC w stanie ustalonym

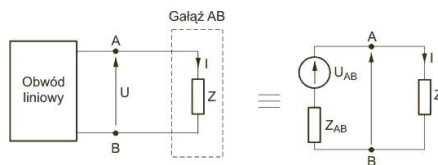


$$e(t) = 10\sqrt{2} \sin \omega t$$

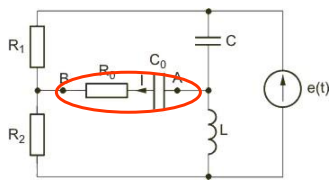
$$R_0 = 7,5\Omega; \quad R_1 = 5\Omega; \quad R_2 = 5\Omega;$$

$$X_L = 5\Omega; \quad X_C = 10\Omega; \quad X_{C_0} = 5\Omega$$

Z twierdzenia Thevenina



## Analiza złożonych obwodów RLC w stanie ustalonym

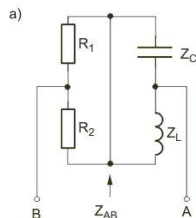


Z twierdzenia Thevenina

$$e(t) = 10\sqrt{2} \sin \omega t$$

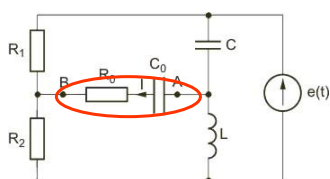
$$R_0 = 7,5\Omega; \quad R_1 = 5\Omega; \quad R_2 = 5\Omega;$$

$$X_L = 5\Omega; \quad X_C = 10\Omega; \quad X_{C_0} = 5\Omega$$



$$Z_{AB} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{Z_C Z_L}{Z_C + Z_L} = 2,5 + j10$$

## Analiza złożonych obwodów RLC w stanie ustalonym



$$e(t) = 10\sqrt{2} \sin \omega t$$

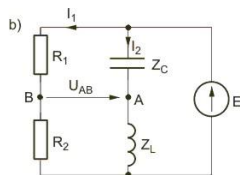
$$R_0 = 7,5\Omega; \quad R_1 = 5\Omega; \quad R_2 = 5\Omega;$$

$$X_L = 5\Omega; \quad X_C = 10\Omega; \quad X_{C_0} = 5\Omega$$

$$I_1 = \frac{E}{R_1 + R_2} = 1$$

$$I_2 = \frac{E}{jX_L - jX_C} = j2$$

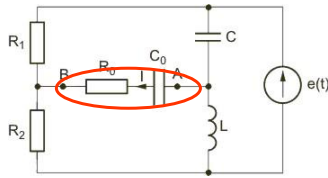
$$U_{AB} = R_1 I_1 - Z_C I_2 = -15$$



$$Z_{AB} = 2,5 + j10$$

$$U_{AB} = -15$$

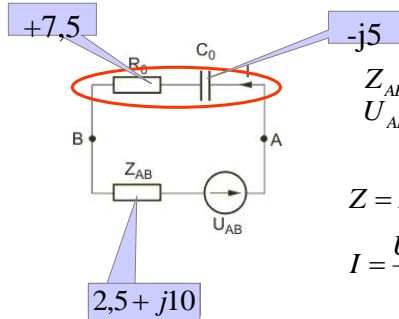
## Analiza złożonych obwodów RLC w stanie ustalonym



$$e(t) = 10\sqrt{2} \sin \omega t$$

$$R_0 = 7,5\Omega; \quad R_1 = 5\Omega; \quad R_2 = 5\Omega;$$

$$X_L = 5\Omega; \quad X_C = 10\Omega; \quad X_{C_0} = 5\Omega$$



$$Z_{AB} = 2,5 + j10$$

$$U_{AB} = -15$$

$$Z = Z_{AB} + R_0 + Z = 2,5 + j10 + 7,5 - j5 = 10 + j5$$

$$I = \frac{U_{AB}}{Z} = \frac{-15}{10 + j5} = \frac{-3(2 - j)}{5} \approx -1,34e^{-j26^\circ}$$

$$i(t) = -1,34\sqrt{2} \sin(\omega t - 26^\circ)$$

## Analiza złożonych obwodów RLC w stanie ustalonym. Metoda potencjałów węzłowych

W **METODZIE POTENCJAŁÓW WĘZŁOWYCH** jako zmienne przyjmuje się potencjały poszczególnych węzłów obwodu określane względem jednego arbitralnie wybranego węzła uznanego za **węzeł odniesienia** („masy”), którego potencjał przyjmuje się za równy zero. Liczba równań w tej metodzie jest równa liczbie węzłów niezależnych jest więc znacznie mniejsza niż w metodzie wykorzystującej bezpośrednio układ równań otrzymanych w wyniku zastosowania praw Kirchhoffa.

każdy obwód liniowy RLC może być opisany równaniem macierzowym potencjałów węzłowych o postaci

$$\mathbf{YV} = \mathbf{I}_{zr}$$

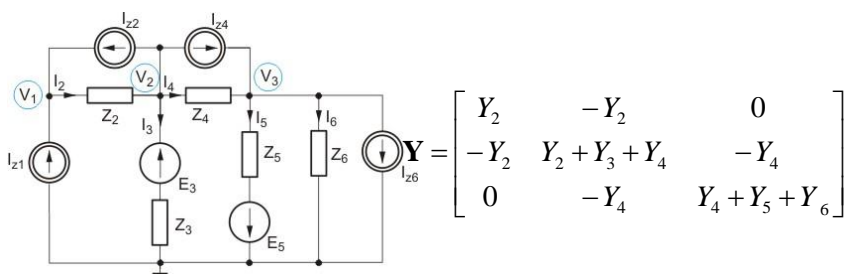
$\mathbf{Y}$  jest macierzą węzłową ( $N$  jest ilością węzłów niezależnych),  $\mathbf{V}$  wektorem niezależnych potencjałów węzłowych a  $\mathbf{I}_{zr}$  wektorem prądów źródłowych

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1N} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{N1} & Y_{N2} & \dots & Y_{NN} \end{bmatrix} \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \dots \\ V_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{I}_{zr} = \begin{bmatrix} I_{zr1} \\ I_{zr2} \\ \dots \\ I_{zrN} \end{bmatrix}$$

## Analiza złożonych obwodów RLC w stanie ustalonym

$Y_{ii}$  (położone na przekątnej) nazywane są admitancjami własnymi węzła  $i$   
 Elementy  $Y_{ij}$  ( $i \neq j$ ) są **admitancjami wzajemnymi** między węzłem  $i$ -tym oraz  $j$ -tym.  
 W przypadku obwodów RLC **bez źródeł sterowanych** admitancja własna węzła  $i$ -tego jest równa sumie admitancji wszystkich gałęzi włączonych w tym węzle  
 Admitancja wzajemna dwu węzłów jest równa admitancji łączącej te węzły wziętej ze znakiem minus.  
 $I_{isz}$  są równe sumie wszystkich prądów źródłowych wpływających do węzła (ze znakiem plus) i wypływających (ze znakiem minus) z węzła  
 Metoda dopuszcza występowanie jedynie źródeł prądowych. Występujące w obwodzie źródła napięciowe należy zamienić na prądowe.

## Analiza złożonych obwodów RLC w stanie ustalonym

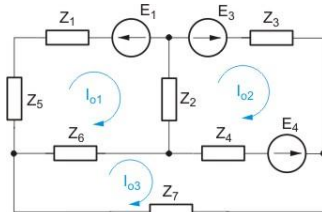


$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{z2} + I_{z1} \\ -I_{z2} - I_{z4} + E_3 Y_3 \\ -I_{z6} + I_{z4} - E_5 Y_5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{I}_{zr}$$

## Analiza złożonych obwodów RLC w stanie ustalonym. Metoda prądów oczkowych

W **METODZIE PRĄDÓW OCZKOWYCH** jako zmienne wprowadza się prądy oczkowe, czyli prądy przypisane niezależnym oczkom, występującym w obwodzie.



$$\mathbf{I}_o = \begin{bmatrix} I_{o1} \\ I_{o2} \\ \dots \\ I_{oN} \end{bmatrix}$$

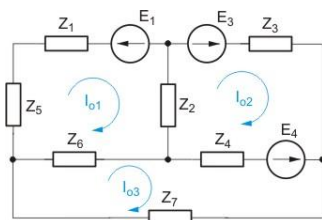
Otrzymuje się opis obwodu w postaci układu równań oczkowych

$$\mathbf{Z}\mathbf{I}_o = \mathbf{E}$$

$\mathbf{Z}$  jest macierzą oczkową ( $N$  jest ilością oczek niezależnych),  $\mathbf{I}$  wektorem prądów oczkowych a  $\mathbf{E}$  wektorem napięć wymuszających

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{N1} & Z_{N2} & \dots & Z_{NN} \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{o1} \\ E_{o2} \\ \dots \\ E_{oN} \end{bmatrix} \quad \mathbf{I}_o = \begin{bmatrix} I_{o1} \\ I_{o2} \\ \dots \\ I_{oN} \end{bmatrix}$$

## Metoda prądów oczkowych



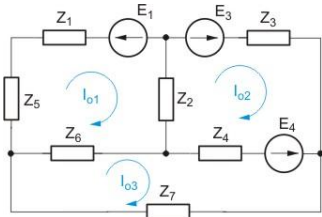
$$\mathbf{I}_o = \begin{bmatrix} I_{o1} \\ I_{o2} \\ \dots \\ I_{oN} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z}\mathbf{I}_o = \mathbf{E}$$

Elementy  $Z_{ii}$  nazywane są **impedancjami własnymi** oczka  $i$ -tego. Elementy  $Z_{ij}$  położone poza główną przekątną są **impedancjami wzajemnymi** między oczkiem  $i$ -tym oraz  $j$ -tym. Impedancja wzajemna dwu oczek przy identycznym zwrocie wszystkich prądów oczkowych jest równa impedancji wspólnej dla obu oczek wziętej ze znakiem minus.  $E_{ok}$  jest równe sumie wszystkich napięć wymuszających w  $k$ -tym oczku.

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{N1} & Z_{N2} & \dots & Z_{NN} \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{o1} \\ E_{o2} \\ \dots \\ E_{oN} \end{bmatrix} \quad \mathbf{I}_o = \begin{bmatrix} I_{o1} \\ I_{o2} \\ \dots \\ I_{oN} \end{bmatrix}$$

## Analiza złożonych obwodów RLC w stanie ustalonym



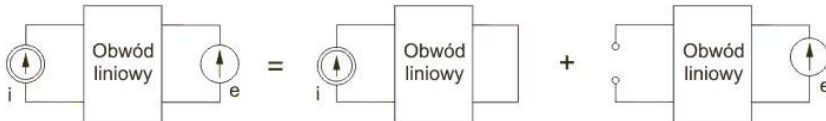
$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 + Z_5 + Z_6 & -Z_2 & -Z_6 \\ -Z_2 & Z_3 + Z_2 + Z_4 & -Z_4 \\ -Z_6 & -Z_4 & Z_6 + Z_7 + Z_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -E_1 \\ E_3 - E_4 \\ E_4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{I}_o = \begin{bmatrix} I_{o1} \\ I_{o2} \\ I_{o3} \end{bmatrix}$$

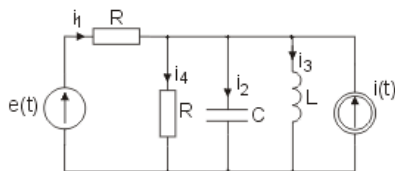
$$\mathbf{I}_o = \mathbf{E} \mathbf{Z}^{-1}$$

## Analiza złożonych obwodów RLC w stanie ustalonym . Zasada superpozycji

### Zasada superpozycji



przykład

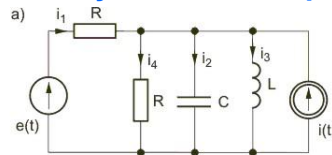


$$R = 2\Omega, \quad C = 1F, \quad L = 2H$$

$$i(t) = 10\sqrt{2} \sin(\omega t + 45^\circ), \quad \omega = 1 \text{ rad/s}$$

$$u(t) = 2$$

## Analiza złożonych obwodów RLC w stanie ustalonym. Zasada superpozycji



$$R = 2\Omega, \quad C = 1F, \quad L = 2H$$

$$i(t) = 10\sqrt{2} \sin(\omega t + 45^\circ), \quad \omega = 1 \text{ rad/s}$$

$$u(t) = 2$$

$$I_1 = 1$$

$$Y_{RLC} = j - j/2 + 1/2 + 1/2 = 1 + j0,5$$

$$Z_{RLC} = 0,8 - j0,4 = 2\sqrt{0,2}e^{-j26,6^\circ}$$

$$U_{RLC} = 10e^{j45^\circ} \cdot 2\sqrt{0,2}e^{-j26,6^\circ} = 8,94e^{j18,4^\circ}$$

$$I_1 = -\frac{U_{RLC}}{R} = 4,47e^{j(18,4^\circ - 180^\circ)}$$

$$i_1(t) = 1 + 4,47\sqrt{2} \sin(\omega t - 162^\circ) \quad \text{A}$$

## Analiza złożonych obwodów RLC w stanie ustalonym przy wymuszeniu niesinusoidalnym.

Niech będzie dana funkcja okresowa  $f(t)$ ,

Jeżeli

- funkcja jest w przedziale 0 do T bezwzględnie całkowalna, tzn.  $\int_0^T |f(t)| dt < \infty$
- ma skończoną liczbę maksimów i minimów co najwyżej skończoną liczbę punktów nieciągłości  $t_k$ , przy czym w każdym punkcie nieciągłości istnieją skończone granice prawostronna i lewostronna, a wartość funkcji w tym punkcie przyjmuje się jako średnią arytmetyczną granicy lewo- i prawostronnej, tj.

$$f(t_k) = 1/2(f(t_{k-}) + f(t_{k+}))$$

To funkcję można przedstawić w postaci szeregu

$$f(t) = F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} F_k \sin(k\omega t + \psi_k)$$

Lub

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \sin(k\omega t) + B_k \cos(k\omega t)]$$

Jest to tzw. *szereg trygonometryczny Fouriera*

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt \quad A_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(n\omega t) dt \quad B_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin(n\omega t) dt$$



## Analiza złożonych obwodów RLC w stanie ustalonym przy wymuszeniu niesinusoidalnym.

Obie postaci są równoważne

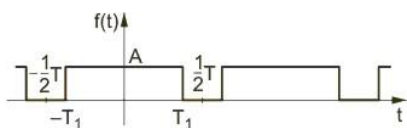
$$f(t) = F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} F_k \sin(k\omega t + \psi_k)$$

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \sin(k\omega t) + B_k \cos(k\omega t)]$$

$$F_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}$$

$$\psi_k = \arctg \frac{A_k}{B_k}$$

## Analiza złożonych obwodów RLC w stanie ustalonym przy wymuszeniu niesinusoidalnym. Przykład



$$\omega = 2\pi / T$$

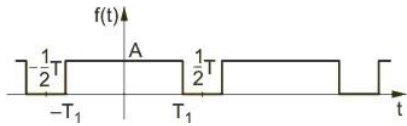
$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A dt = 2AT_1 / T$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A \cos(n\omega t) dt = 2A / \pi k (2\pi k T_1 / T)$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A \sin(n\omega t) dt = 0$$

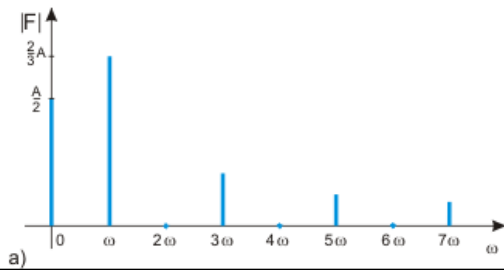
$$f(t) = 2A \frac{T_1}{T} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{2A}{\pi k} \sin(2k\pi \frac{T_1}{T}) \right] \cos(k \frac{2\pi}{T} t)$$

## Analiza złożonych obwodów RLC w stanie ustalonym przy wymuszeniu niesinusoidalnym



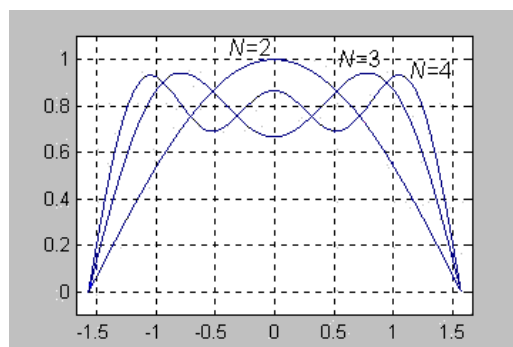
Jeżeli wypełnienie impulsów jest 1:1, tj.  $T_1 = T/4$

$$f(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \cos(\omega t) - \frac{2A}{3\pi} \cos(3\omega t) + \frac{2A}{5\pi} \cos(5\omega t) - \frac{2A}{7\pi} \cos(7\omega t) + \dots$$

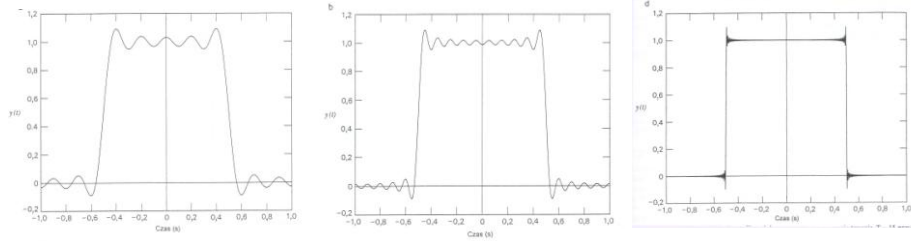


a)

## Analiza złożonych obwodów RLC w stanie ustalonym przy wymuszeniu niesinusoidalnym

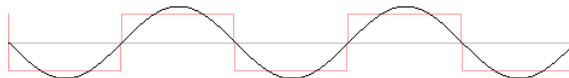


## Analiza złożonych obwodów RLC w stanie ustalonym przy wymuszeniu niesinusoidalnym



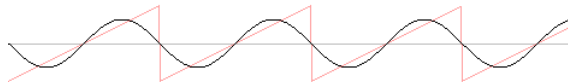
## Analiza złożonych obwodów RLC w stanie ustalonym przy wymuszeniu niesinusoidalnym

harmonics: 1



## Analiza złożonych obwodów RLC w stanie ustalonym przy wymuszeniu niesinusoidalnym

harmonics: 1



## Wartość skuteczna napięcia i prądu niesinusoidalnego.

Niech  $u(t)$  i  $i(t)$  będą napięciem i prądem sygnału niesinusoidalnego danego szeregiem

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{km} \sin(k\omega t + \psi_k)$$

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \sin(k\omega t + \varphi_k)$$

Moduł wartości skutecznej napięcia i prądu dany jest wzorem

$$|U| = \sqrt{\sum_k |U_k|^2} = \sqrt{|U_0|^2 + |U_1|^2 + |U_2|^2 + \dots}$$

$$|I| = \sqrt{\sum_k |I_k|^2} = \sqrt{|I_0|^2 + |I_1|^2 + |I_2|^2 + \dots}$$

Współczynnikiem zawartości harmoniczych w sygnale  $f(x)$  jest

$$h = \sqrt{\frac{\sum_{k=2, \dots} |F_k|^2}{\sum_{k=1, \dots} |F_k|^2}}$$

## Moc przebiegu niesinusoidalnego.

Niech  $u(t)$  i  $i(t)$  będą napięciem i prądem sygnału niesinusoidalnego

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t)dt$$

Moc sygnału jest równa sumie mocy sygnałów harmoniczných

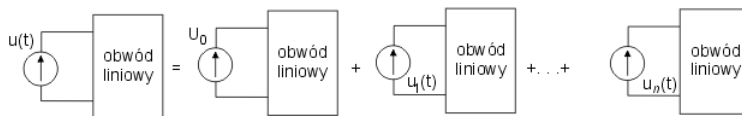
$$P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |U_k| |I_k| \cos \varphi_k$$

$\varphi_k$  jest przesunięciem fazowym pomiędzy prądem i napięciem k-tej harmoniczných

Podobnie dla mocy biernej

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} |U_k| |I_k| \sin \varphi_k$$

## Rozwiązywanie obwodów przy wymuszeniu niesinusoidalnym.

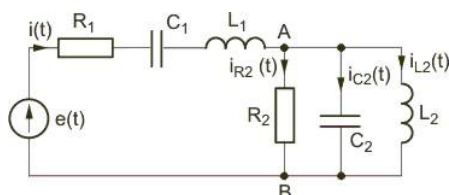


a)

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^n U_{km} \sin(k\omega t + \varphi_k)$$

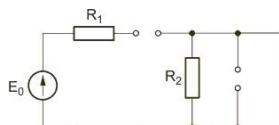
b)

## Rozwiązywanie obwodów przy wymuszeniu niesinusoidalnym. Przykład.

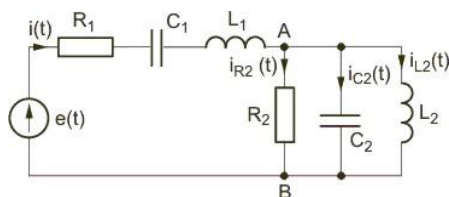


$$\begin{aligned}
 R_1 &= 1\Omega, R_2 = 2\Omega \\
 L_1 &= 1H, L_2 = 2H \\
 C_1 &= 1/4F, C_2 = 1/2F \\
 e(t) &= 10 + 20\sqrt{2} \sin \omega t + 10\sqrt{2} \sin 2\omega t \\
 \omega &= 1 \text{ rad/s}
 \end{aligned}$$

Składowa stała



## Rozwiązywanie obwodów przy wymuszeniu niesinusoidalnym. Przykład.

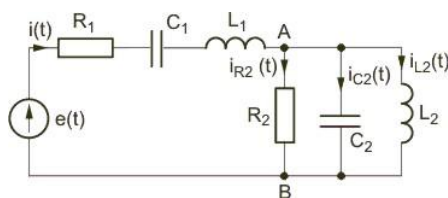


$$\begin{aligned}
 R_1 &= 1\Omega, R_2 = 2\Omega \\
 L_1 &= 1H, L_2 = 2H \\
 C_1 &= 1/4F, C_2 = 1/2F \\
 e(t) &= 10 + 20\sqrt{2} \sin \omega t + 10\sqrt{2} \sin 2\omega t \\
 \omega &= 1 \text{ rad/s}
 \end{aligned}$$

Harmoniczna pierwsza

$$\begin{aligned}
 X_{L1}^{(1)} &= \omega L_1 = 1 & Z_{R2C2L2} = 2 \Rightarrow I^{(1)} &= \frac{20}{1 + j - 4j + 2} = 3,33 \cdot (1 + j) = 4,7e^{j45^\circ} \\
 X_{L2}^{(1)} &= \omega L_2 = 2 & U_{AB}^{(1)} &= 9,4e^{j45^\circ} \\
 X_{C1}^{(1)} &= \frac{1}{\omega C_1} = 4 & I_{L2}^{(1)} &= -\frac{U_{AB}^{(1)}}{jX_{L2}^{(1)}} = 4,7e^{-j45^\circ} \\
 X_{C2}^{(1)} &= \frac{1}{\omega C_2} = 2 & I_{C2}^{(1)} &= \frac{U_{AB}^{(1)}}{-jX_{C2}^{(1)}} = 4,7e^{j135^\circ}
 \end{aligned}$$

## Rozwiązywanie obwodów przy wymuszeniu niesinusoidalnym. Przykład.



$$R_1 = 1\Omega, R_2 = 2\Omega$$

$$L_1 = 1H, L_2 = 2H$$

$$C_1 = 1/4F, C_2 = 1/2F$$

$$e(t) = 10 + 20\sqrt{2} \sin \omega t + 10\sqrt{2} \sin 2\omega t$$

$$\omega = 1 \text{ rad/s}$$

Harmoniczna druga

$$X_{L1}^{(2)} = \omega L_1 = 2$$

$$X_{L2}^{(2)} = \omega L_2 = 4$$

$$X_{C1}^{(2)} = \frac{1}{\omega C_1} = 2$$

$$X_{C2}^{(2)} = \frac{1}{\omega C_2} = 1$$

$$Z_{R2C2L2} = 1,11e^{-j56^\circ} \Rightarrow I^{(2)} = \frac{10}{1,5 + 0,75j} = 5,37e^{j29,6^\circ}$$

$$U_{AB}^{(2)} = 5,97e^{-j26^\circ}$$

$$I_{L2}^{(2)} = \frac{U_{AB}^{(2)}}{jX_{L2}^{(2)}} = 1,49e^{-j116^\circ}$$

$$I_{C2}^{(2)} = \frac{U_{AB}^{(2)}}{-jX_{C2}^{(2)}} = 5,97e^{j64^\circ}$$

## Rozwiązywanie obwodów przy wymuszeniu niesinusoidalnym. Przykład.

Wartości skuteczne

$$|E| = \sqrt{10^2 + 20^2 + 10^2} = 24,5V$$

$$|I| = \sqrt{4,7^2 + 5,37^2} = 7,13A$$

$$|I_{R2}| = \sqrt{4,7^2 + 2,98^2} = 5,57A$$

$$|I_{L2}| = \sqrt{4,7^2 + 1,49^2} = 4,93A$$

$$|I_{C2}| = \sqrt{4,7^2 + 5,97^2} = 7,62A$$

## ANALIZA ZŁOŻONYCH OBWODÓW RLC W STANIE NIEUSTALONYM

### Analiza złożonych obwodów RLC w stanie nieustalonym

- **stan ustalony**, charakteryzujący się tym, że postać odpowiedzi jest identyczna z postacią wymuszenia (na przykład, przy wymuszeniu sinusoidalnym odpowiedź ustalona jest również sinusoidalna o tej samej częstotliwości, choć innej fazie początkowej i innej amplitudzie),
- **stan nieustalony**, w którym przebiegi czasowe odpowiedzi mają inny charakter niż wymuszenie (na przykład, przy wymuszeniu stałym odpowiedź obwodu jest wykładniczo malejąca lub oscylacyjna).

Własności obwodu w stanie ustalonym są nazywane własnościami statycznymi

Własności obwodu w stanie nieustalonym są nazywane własnościami dynamicznymi

Przyczyna powodująca zakłócenie stanu ustalonego obwodu jest zmiana parametrów lub schematu. Taka zamiana zachodząca w pewnej chwili jest nazywana komutacją. Zakłada się, że zmiana zachodzi w zerowym czasie i pomija się zjawisko łuku



## Analiza złożonych obwodów RLC w stanie nieustalonym

### Prawa komutacji

- Zasada ciągłości strumienia skojarzonego z cewką (zasada ciągłości prądu cewki)

$$\Psi(0^-) = \Psi(0^+)$$

$$i_L(0^-) = i_L(0^+)$$

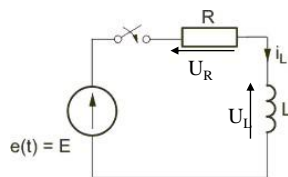
- Zasada ciągłości ładunku elektrycznego (zasada ciągłości napięcia na kondensatorze)

$$q(0^-) = q(0^+)$$

$$u_c(0^-) = u_c(0^+)$$

wielkości nie związane z zależnościami energetycznymi - prąd kondensatora, napięcie cewki, prąd i napięcie na rezystorze mogą zmieniać się w sposób skokowy podczas komutacji. Wartości, jakie przybierają tuż po komutacji, wynikają bądź z praw Kirchhoffa, bądź z prawa Ohma.

## Analiza złożonych obwodów RLC w stanie nieustalonym



$$Ri_L + L\frac{di_L}{dt} = E$$

Rozwiązaniem tego równania jest suma składowej ustalonej i składowej nieustalonej

$$i = i_p + i_u$$

$$i_u = \frac{E}{R};$$

$$Ri_p + L\frac{di_p}{dt} = 0$$

## Rozwiązywanie układów równań liniowych

• **Równania liniowe jednorodne o stałych współczynnikach**

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Zakładamy, że funkcja postaci  $y(x) = e^{rx}$  gdzie  $r$  jest liczbą rzeczywistą lub zespoloną, jest rozwiązaniem powyższego równania. Wówczas

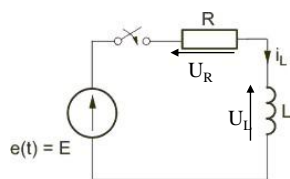
$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0$$

Równanie to nazywamy równaniem charakterystycznym równania liniowego jednorodnego a jego pierwiastki nazywamy pierwiastkami charakterystycznymi tego równania.

- Jeżeli  $r_1, r_2$  są dwoma różnymi pierwiastkami rzeczywistymi równania charakterystycznego, to funkcje  $y_1(x) = e^{r_1 x}$  i  $y_2(x) = e^{r_2 x}$  są dwoma liniowo niezależnymi rozwiązaniami
- Jeżeli  $r$  jest rzeczywistym pierwiastkiem  $k$ -krotnym równania charakterystycznego, to funkcje  $y(x) = e^{rx}, y(x) = x e^{rx}, \dots, y(x) = x^{k-1} e^{rx}$  są liniowo niezależnymi rozwiązaniami rrlj.
- Jeżeli  $r = \alpha + \beta i$  jest pierwiastkiem zespolonym równania charakterystycznego (tym samym  $r^* = \alpha - \beta i$  jest pierwiastkiem tego równania), to funkcje  $y_1(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$  i  $y_2(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x$  są dwoma liniowo niezależnymi rozwiązaniami rrlj.
- Jeżeli  $r = \alpha + \beta i$  jest  $k$ -krotnym pierwiastkiem zespolonym równania charakterystycznego (tym samym  $r^* = \alpha - \beta i$  jest  $k$ -krotnym pierwiastkiem tego równania), to funkcje  $y(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x, y(x) = x e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, y(x) = x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$  i  $y(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x, y(x) = x e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, y(x) = x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x$

są liniowo niezależnymi rozwiązaniami rrlj.

## Analiza złożonych obwodów RLC w stanie nieustalonym



$$Ri_L + L \frac{di_L}{dt} = E$$

Rozwiązaniem tego równania jest suma składowej ustalonej i składowej nieustalonej

$$i = i_p + i_u$$

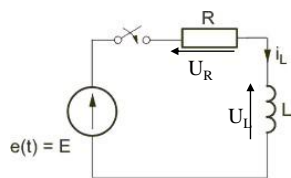
$$i_u = \frac{E}{R}; \quad Ri_p + L \frac{di_p}{dt} = 0$$

Równanie charakterystyczne

$$R + Ls = 0 \Rightarrow s = -\frac{R}{L}$$

$$i_p = A e^{-\frac{R}{L} t}$$

## Analiza złożonych obwodów RLC w stanie niestalnym



$$Ri_L + L \frac{di_L}{dt} = E$$

Rozwiązaniem tego równania jest suma składowej ustalonej i składowej niestalonej

$$i = i_p + i_u$$

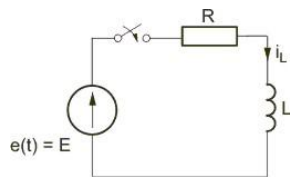
$$i_u = \frac{E}{R}; \quad i_p = Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

W chwili  $t=0$   $i=0$

$$i_p = -i_u = -\frac{E}{R} \Rightarrow A = -\frac{E}{R}$$

$$i = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

## Analiza złożonych obwodów RLC w stanie niestalnym

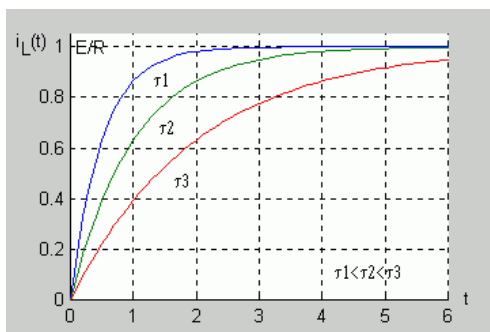


$\tau = \frac{L}{R}$  jest stałą czasową układu.

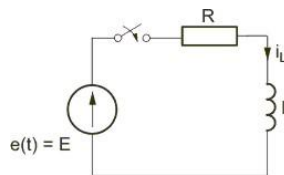
Wobec tego

$$i = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

po upływie trzech stałych czasowych prąd cewki uzyskuje ok 95% swojej wartości ustalonej, a po 5 stałych czasowych – aż 99,3%.

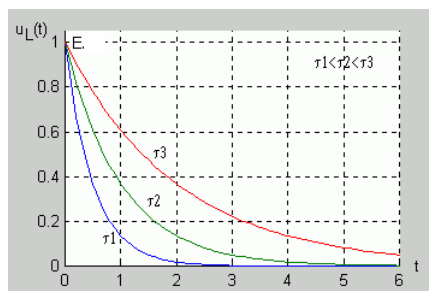


## Analiza złożonych obwodów RLC w stanie nieustalonym

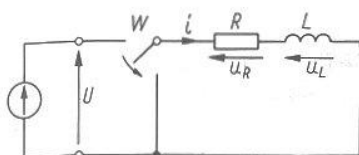


napięcie na cewce jest równe.

$$u_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{E R}{R L} e^{-\frac{t}{\tau}} = E e^{-\frac{t}{\tau}}$$



## Analiza złożonych obwodów RLC w stanie nieustalonym



$$u_R + u_L = 0$$

$$Ri_L + L \frac{di_L}{dt} = 0$$

Rozwiązaniem tego równania jest suma składowej ustalonej i składowej nieustalonej

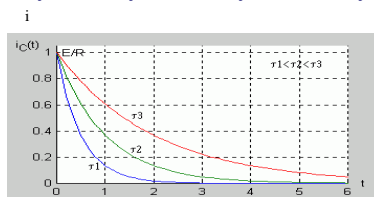
$$Ri_p + L \frac{di_p}{dt} = 0 \Rightarrow i_p = A e^{-\frac{R}{L}t}$$

W chwili  $t=0$

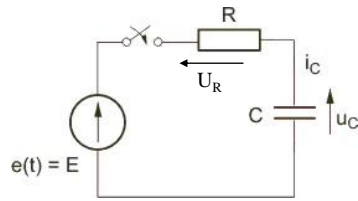
$$i_p = \frac{U}{R} \Rightarrow A = \frac{U}{R}$$

$$i = \frac{U}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$u_R = U e^{-\frac{t}{\tau}} \quad u_L = L \frac{di}{dt} = -U e^{-\frac{t}{\tau}}$$



## Analiza złożonych obwodów RLC w stanie nieustalonym



$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E$$

Rozwiązaniem tego równania jest suma składowej ustalonej i składowej nieustalonej

$$u_C = u_{Cp} + u_{Cu} \quad u_{Cu} = E \quad RC \frac{du_{Cp}}{dt} + u_{Cp} = 0$$

Równanie charakterystyczne ma postać  $RCs + 1 = 0$  a jego pierwiastkiem

Jest  $s = -\frac{1}{RC}$

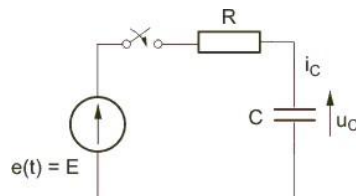
Wobec czego rozwiązanie ma postać  $u_{Cp} = Ae^{-\frac{t}{RC}}$

$$u_C = u_{Cp} + u_{Cu} = E + Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

$$u_C(0^-) = u_C(0^+) \Rightarrow A = -E$$

$$u_C(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

## Analiza złożonych obwodów RLC w stanie nieustalonym

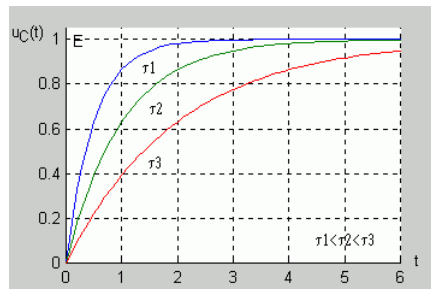


$\tau = RC$  jest stałą czasową układu RC.

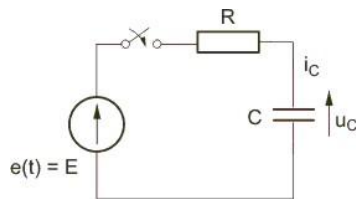
Wobec tego

$$u_C(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

po upływie trzech stałych czasowych napięcie na kondensatorze uzyskuje ok 95% swojej wartości ustalonej, a po 5 stałych czasowych – 99,3%.

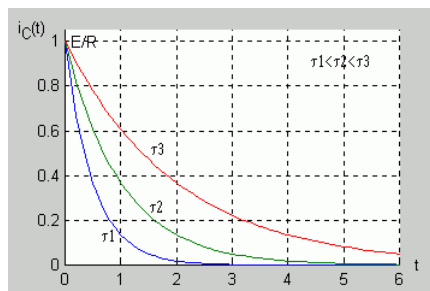


## Analiza złożonych obwodów RLC w stanie niestabilnym

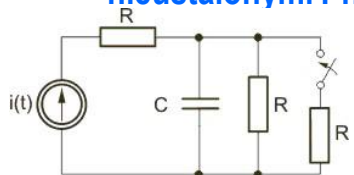


Prąd w obwodzie jest równy.

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$



## Analiza złożonych obwodów RLC w stanie niestabilnym. Przykład 1.



$$i(t) = I = 2\text{mA}; R = 10\text{k}\Omega; C = 10\mu\text{F}$$

$$u_C = i(t)R = 20\text{V}$$

$$u_{C_n} = i(t)R/2 = 10\text{V}$$

Równanie 
$$u_C + C \frac{R}{2} \frac{du_C}{dt} = 0 \quad u_C + 0,05 \frac{du_C}{dt} = 0$$

Równanie charakterystyczne  $1 + 0,05s = 0 \Rightarrow s = -20$  rozwiązanie równania  $u_{C_p} = Ae^{-20t}$

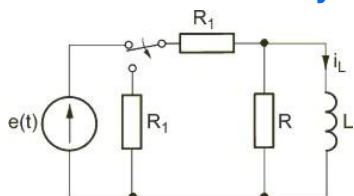
$$u_C(t) = u_{C_p}(t) + u_{C_n}(t) = 10 + Ae^{-20t}$$

$$u_C(0^-) = 20 \Rightarrow 10 + A = 20 \Rightarrow A = 10$$

$$u_C(t) = 10(1 + e^{-20t})$$

$$\tau = 0,05\text{s}$$

## Analiza złożonych obwodów RLC w stanie niestabilnym. Przykład 2.



$$e(t) = 20\sqrt{2} \sin(t); R = 2\Omega; R_1 = 5\Omega; L = 2H$$

$$\omega = 1$$

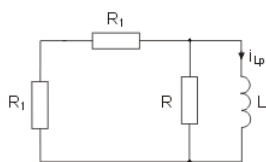
$$Z_L = j\omega L = j2$$

$$Z_{RL} = \frac{2 \cdot j2}{2 + j2} = \frac{2j(1-j)}{(1+j)(1-j)} = 1 + j$$

$$I_L = E \frac{Z_{RL}}{(R_1 + Z_{RL})Z_L} = 20 \frac{1+j}{-2 + j12} = 2,32e^{-j54,5^\circ} \Rightarrow i_L(t) = 2,32\sqrt{2} \sin(t - 54,5^\circ)$$

$$i_L(0^-) = 2,32 \cdot \sqrt{2} \cdot (-0,81) \qquad i_{L_n}(t) = 0$$

## Analiza złożonych obwodów RLC w stanie niestabilnym. Przykład 2.



$$i_L(0^-) = 2,32 \cdot \sqrt{2} \cdot (-0,81) = -2,67$$

$$i_{L_n}(t) = 0$$

Równanie różniczkowe

$$L \frac{di_{Lp}}{dt} + \frac{2R_1R}{2R_1 + R} i_{Lp} = 0$$

$$\frac{di_{Lp}}{dt} + \frac{5}{6} i_{Lp} = 0$$

Równanie charakterystyczne  $s + 5/6 = 0 \Rightarrow s = -5/6$

$$i_{Lp}(t) = Ae^{-5/6t}$$

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = -2,67 \Rightarrow A = -2,67$$

$$i_{Lp}(t) = -2,67e^{-5/6t}$$

$$u_{Lp}(t) = L \frac{di_{Lp}(t)}{dt} = 2 \cdot (2,67 \cdot 5/6) e^{-5/6t} = 4,45e^{-5/6t}$$