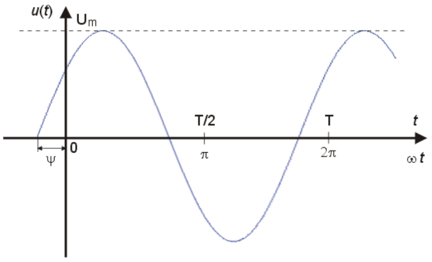
Podstawy elektroniki, elektrotechniki i miernictwa

Wykład 5

Podstawy teorii obwodów (II)

prąd zmienny

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi)$$



$u(t)$ - wartość chwilowa napięcia

U_m - wartość maksymalna (szczytowa) napięcia zwana również amplitudą

ω - pulsacja (w radianach na sekundę)

ψ - faza początkowa napięcia odpowiadająca chwili t=0

T - okres przebiegu sinusoidalnego

$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ - częstotliwość mierzona w hercach (Hz)

prąd zmienny- wartość średnia i skuteczna

Wartość średnia półokresowa określana jest jako równoważne natężenie prądu stałego powodującego przepływ identycznego ładunku w czasie równym T/2.

$$I_{av} = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} i(t)dt$$

$$I_{av} = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} I_m \sin\omega t dt = \left[\frac{2I_m}{T}\frac{(-\cos\omega t)}{\omega}\right]_0^{T/2} = \frac{2}{\pi}I_m \approx 0{,}637\cdot I_m$$

Podobnie $U_{av} \approx 0{,}637\cdot U_m$

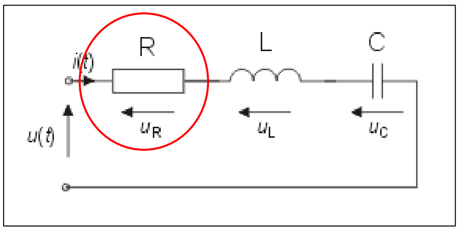
Wartość skuteczna to równoważne natężenie prądu stałego powodującego wydzielenie identycznej energii na oporniku R zatem

$$RI^2T = \int_0^T Ri^2 dt \Rightarrow I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2 \sin^2\omega t dt} = \sqrt{\frac{I_m^2}{2T}\int_0^T (1-\cos 2\omega t)dt}$$

$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ i podobnie $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$

Układy reaktancyjne – prąd zmienny

Element R



przez R płynie prąd $i(t) = i_m \sin(\omega t + \varphi)$

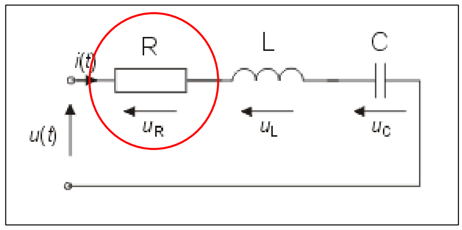
To $$u_R = Ri = RI_m \sin(\omega t + \varphi) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$$

A wartości skuteczne i amplitudy napięcia i prądu

$$I = \frac{U}{R} \qquad I_m = \frac{U_m}{R}$$

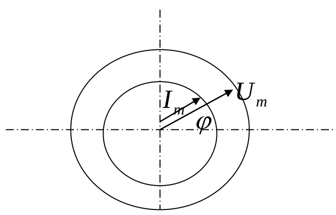
Układy reaktancyjne – prąd zmienny

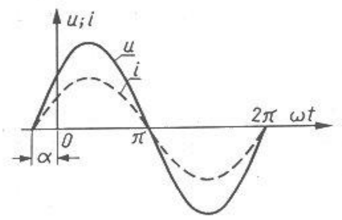
Element R



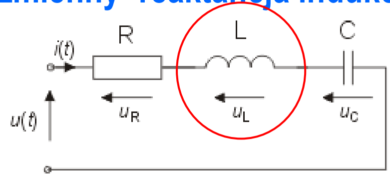
$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$u_R(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$$





prąd zmienny- reaktancja indukcyjna



Element L

przez L płynie prąd $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi)$

To napięcie u_L równe jest sile elektromotorycznej indukcji

$$u_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{d}{dt}[I_m \sin(\omega t + \varphi)] = \omega L I_m \cos(\omega t + \varphi) = \omega L I_m \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

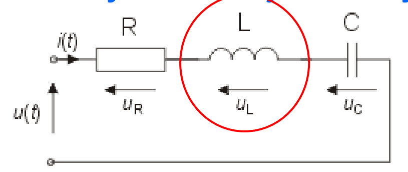
Przyjmując $U_m = \omega L I_m$ mamy $\boxed{u_L = U_m \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})}$

$\boxed{\omega L}$ nazywana jest ***reaktancją indukcyjną*** X_L

Zatem $U_m = X_L I_m$ oraz $U = X_L I$

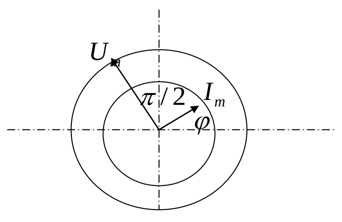
prąd zmienny- reaktancja indukcyjna

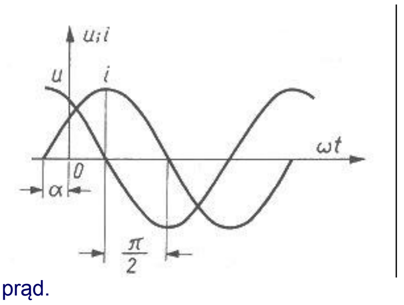
Element L



przez L płynie prąd $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi)$

napięcie na indukcyjności równe jest $u_L = U_m \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$

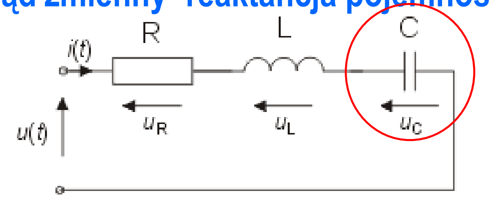




Napięcie na indukcyjności wyprzedza prąd.

prąd zmienny- reaktancja pojemnościowa

Element C



Napięcie na elemencie C zmienia się zgodnie ze wzorem $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$

To ładunek zgromadzony $q = CU_m \sin(\omega t + \varphi)$

Zatem w obwodzie będzie płynął prąd

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}[CU_m \sin(\omega t + \varphi)] = \omega CU_m \cos(\omega t + \varphi) = \omega CU_m \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

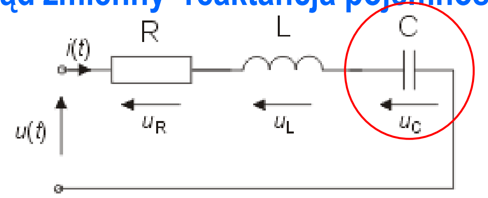
oznaczmy $I_m = \omega CU_m$ wtedy $\boxed{i = I_m \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})}$

$\boxed{X_C = \frac{1}{\omega C}}$ nosi nazwę ***reaktancji pojemnościowej*** *i*

$$I_m = \frac{U_m}{X_C} \quad \textit{oraz} \quad I = \frac{U}{X_C}$$

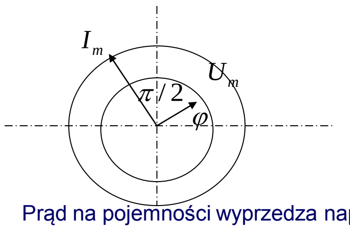
prąd zmienny- reaktancja pojemnościowa

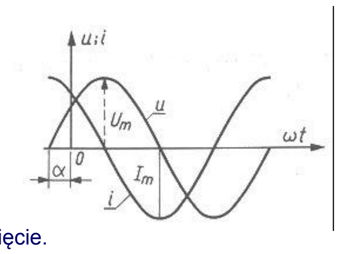
Element C



Napięcie na elemencie C $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$

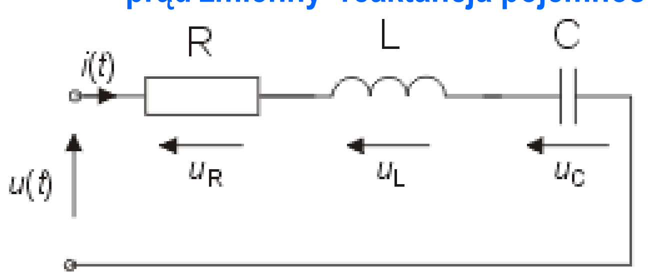
w obwodzie płynie prąd $i = I_m \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$





Prąd na pojemności wyprzedza napięcie.

prąd zmienny- reaktancja pojemnościowa



CIUL

Decybele [dB]

Decybel – logarytmiczna jednostka miary, oznaczana symbolem **dB**. używana jest w sytuacji, gdy należy porównywać wielkości.

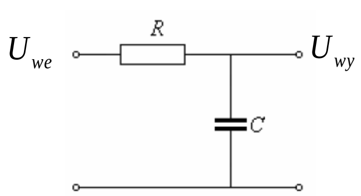
$$k_p[dB] = 10\log_{10}\frac{P_{wy}}{P_{we}}$$

dB	Stosunek Pwy/Pwe
0	1
3	2
6	4
9	8
10	10
20	100

$$k_u[dB] = 20\log_{10}\frac{U_{wy}}{U_{we}}$$

dB	Stosunek Uwy/Uwe
0	1
3	√2
6	2
12	4
20	10

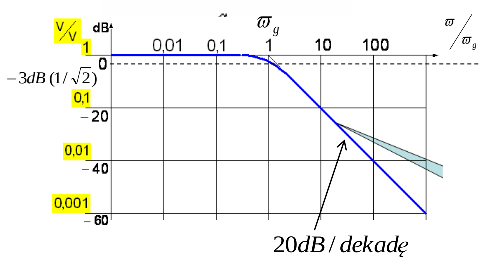
Filtr dolnoprzepustowy



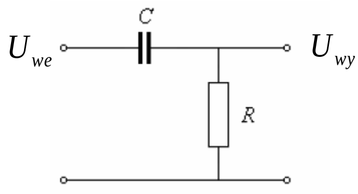
$$\frac{U_{we}}{U_{wy}} \approx \frac{X_C}{R+X_C} = \frac{1/\varpi C}{R+1/\varpi C} = \frac{1}{1+\varpi RC}$$

Pulsacja graniczna $\varpi_g = 1/RC$

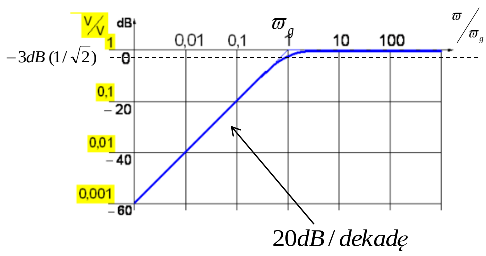
Tłumienie dla ϖ_g wynosi $3dB = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}71$



Filtr górnoprzepustowy



$$\frac{U_{we}}{U_{wy}} \approx \frac{R}{R+X_C} = \frac{R}{R+1/\varpi C} = \frac{\varpi RC}{1+\varpi RC}$$

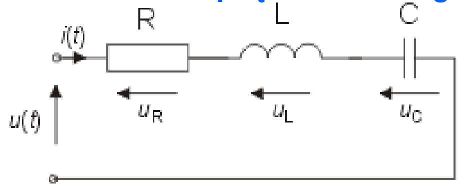


Pulsacja graniczna $\varpi_g = 1/RC$

Tłumienie dla ϖ_g wynosi $3dB = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}71$

Analiza obwodów prądu zmiennego

równanie obwodu prądu zmiennego



Z I prawa Kirchhoffa

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi) = Ri + \frac{1}{C}\int i dt + L\frac{di}{dt}$$

Rozwiązanie równania składa się z dwóch składowych prądu:

- Składowej ustalonej - jest to stan który zostanie osiągnięty dla $t = \infty$
- składowej przejściowej (różnica między rozwiązaniem rzeczywistym różniczkowo-całkowego równania obwodu a składową ustaloną).

Składową ustalona można wyznaczyć stosując metodę symboliczną.

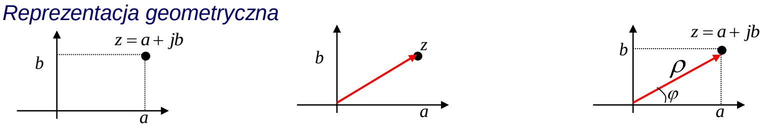
liczby zespolone

Jednostka urojona $j^2 = -1$

Liczba zespolona $z = a + jb$ *gdzie* $a = \mathrm{Re}(z)$ *część rzeczywista*

$b = \mathrm{Im}(z)$ *część urojona*

Reprezentacja geometryczna



$$z = \rho(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

$$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$ *moduł liczby z*

Reprezentacja wykładnicza

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$$ *wzór Eulera*

$$\boxed{z = \rho e^{j\varphi}}$$

liczby zespolone

- Sprzężenie zespolone

$$z = \alpha + j\beta \Rightarrow z^* = \alpha - j\beta$$

$$(|z|e^{j\varphi})^* = |z|e^{-j\varphi}$$

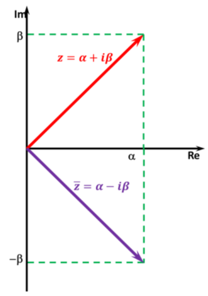
- użyteczne wzory

$$zz^* = |z|^2$$

$$j = e^{j90^\circ} \qquad \frac{1}{j} = -j = e^{-j90^\circ}$$

$$jz = |z|e^{j(\alpha+90^\circ)}$$

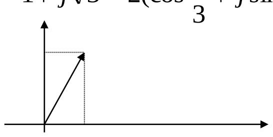
$$-jz = |z|e^{j(\alpha-90^\circ)}$$



liczby zespolone

Przykład

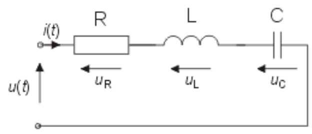
$$z = 1 + j\sqrt{3} = 2(\cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3}) = 2e^{j\frac{\pi}{3}}$$



Działania na liczbach zespolonych

- Dodawanie
- Odejmowanie
- Mnożenie
- Dzielenie

prąd zmienny –metoda symboliczna



$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi) = Ri + \frac{1}{C}\int i dt + L\frac{di}{dt}$$

Po zastąpieniu wartości chwilowych prądu i napięcia ich reprezentacja zespoloną

$$\boxed{u(t) = U_m e^{j\psi} e^{j\omega t} \qquad i(t) = I_m e^{j\psi_i} e^{j\omega t}}$$

Otrzymujemy równanie

$$U_m e^{j\psi} e^{j\omega t} = RI_m e^{j\psi_i} e^{j\omega t} + j\omega L I_m e^{j\psi_i} e^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega C} I_m e^{j\psi_i} e^{j\omega t}$$

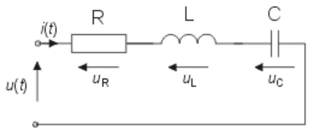
Po podzieleniu obu stron równania przez $e^{j\omega t}$ i przejściu do wartości skutecznych otrzymujemy

$$\frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi} = R\frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_i} + j\omega L\frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_i} + \frac{1}{j\omega C}\frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_i}$$

$$jezeli \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_i} \quad a \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi}$$

$$\boxed{U = RI + j\omega LI + \frac{1}{j\omega C} I}$$

prąd zmienny –metoda symboliczna



$$U = RI + j\omega LI + \frac{1}{j\omega C} I$$

Odpowiednio $\quad U_R = RI \qquad U_L = j\omega LI \qquad U_C = \frac{1}{j\omega C} I$

wprowadza się uogólnienie rezystancji w postaci **impedancji zespolonej** wiążącej wartości skuteczne prądu i napięcia na elementach *R*, *L*, *C* w stanie ustalonym przy wymuszeniu sinusoidalnym.

$$Z_R = R \qquad Z_L = j\omega L = jX_L \qquad Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} = -jX_C$$

Jeżeli $Z = Z_R + Z_L + Z_C$ to prawo Ohma dla wartości symbolicznych ma postać

$$I = \frac{U}{Z} = |I| e^{j\psi_i}$$

gdzie ***moduł prądu =*** $\quad |I| = \frac{|U|}{|Z|} = \frac{|U|}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}}$

a ***przesunięcie fazowe*** $\quad \varphi = \psi - \psi_i = arctg\frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}$

φ jest **dodatni** dla odwodów o charakterze indukcyjnym a **ujemny** dla obwodów o charakterze pojemnościowym

prąd zmienny –metoda symboliczna

Istnieje odpowiednik konduktancji dla impedancji zespolonej o ogólnym wzorze

$$Y = \frac{1}{Z}$$

Noszący nazwę ***admitancji zespolonej***

$$Y_R = G = \frac{1}{R} \qquad Y_C = j\omega C \qquad Y_L = -j\frac{1}{\omega L}$$

prąd zmienny –metoda symboliczna

- Przejście z opisu funkcji zależnej od czasu do jej reprezentacji zespolonej :

  Powiedzmy, że mamy wymuszenie $u(t) = 15\sin(\omega t + 30^\circ)$
  To reprezentacja symboliczna będzie równa

  $$U = \frac{15}{\sqrt{2}} e^{j30^\circ} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot 7{,}5 + j\frac{7{,}5}{\sqrt{2}}$$

- Przejście **postaci symbolicznej** (zespolonej) równań obwodu do postaci funkcji zależnej od czasu polega na pomnożeniu modułu wartości skutecznej przez $\sqrt{2}$ i uzupełnieniu wyniku o funkcję $\sin(\omega t + \varphi)$

Przykład:

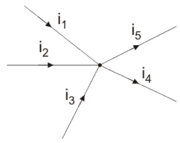
Jeżeli wartość skuteczna zespolona prądu wynosi $I = 15e^{j30^\circ}$ to odpowiedni przebieg czasowy jest równy

$$i(t) = 15\sqrt{2}\sin(\omega t + 30^\circ)$$

prawo Kirchhoffa

I prawo Kirchhoffa

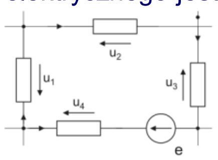
Suma algebraiczna prądów zespolonych w każdym węźle obwodu elektrycznego jest równa zeru



$$\sum_k I_k = 0$$

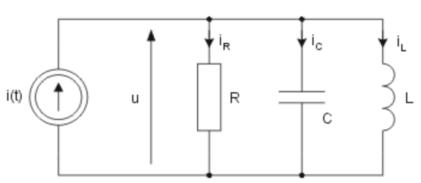
II prawo Kirchhoffa

Suma algebraiczna napięć zespolonych w każdym oczku obwodu elektrycznego jest równa zeru



$$\sum_k U_k = 0$$

przykład



$$R = 10\Omega, \quad C = 100\mu F, \quad L = 5mH$$

$$i(t) = 5\sqrt{2}\sin(1000\,t)A$$

$$\omega = 1000$$

$$I = 5$$

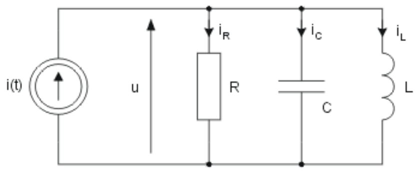
$$Z_L = j\omega L = j5$$

$$Z_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j10$$

$$Y = \frac{1}{10} + \frac{1}{j5} - \frac{1}{j10} = 0{,}1 - \frac{j2}{10} + \frac{j}{10} = 0{,}1 - j0{,}1$$

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{10}{\sqrt{2}} e^{j45^\circ}$$

przykład



$R = 10\Omega, \quad C = 100\mu F, \quad L = 5mH$

$i(t) = 5\sqrt{2}\sin(1000t)A$

$I = 5 \qquad Z = \frac{1}{Y} = \frac{10}{\sqrt{2}} e^{j45^\circ}$

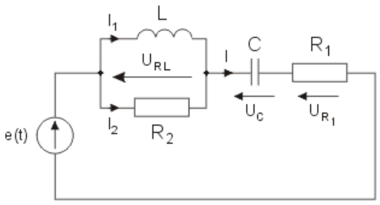
$$U = ZI = \frac{50}{\sqrt{2}} e^{j45^\circ} \qquad u(t) = 50\sin(1000t + 45^\circ)$$

$$I_R = \frac{U}{R} = \frac{5}{\sqrt{2}} e^{j45^\circ} \qquad i_R(t) = 5\sin(1000t + 45^\circ)$$

$$I_L = \frac{U}{Z_L} = \frac{10}{\sqrt{2}} e^{-j45^\circ} \qquad i_L(t) = 10\sin(1000t - 45^\circ)$$

$$I_C = \frac{U}{Z_C} = \frac{5}{\sqrt{2}} e^{j135^\circ} \qquad i_C(t) = 5\sin(1000t + 135^\circ)$$

przykład 2



$R_1 = 10\Omega, \quad R_2 = 5\Omega \quad C = 1mF, \quad L = 50mH$

$e(t) = 20\sqrt{2}\sin(100t - 90^\circ)V$

$\omega = 100$

$E = 20e^{-j90^\circ}$

$Z_L = j5$

$Z_C = -j10$

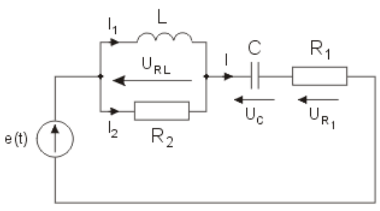
$$Z = Z_{RL} + R_1 + Z_C$$

$$Z_{RL} = \frac{j25}{5 + j5} = \frac{j5}{1 + j} = \frac{j5(1 - j)}{(1 + j)(1 - j)} = 2{,}5 + 2{,}5j = 2{,}5\sqrt{2}e^{j45^\circ}$$

$$Z = 14{,}58e^{-j31^\circ}$$

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{20e^{-j90^\circ}}{14{,}58e^{-j31^\circ}} \approx 1{,}37e^{-j59^\circ}$$

$$i(t) = 1{,}37\sqrt{2}\sin(\omega t - 59^\circ)$$



Przykład 2

$R_1 = 10\Omega, \quad R_2 = 5\Omega \quad C = 1mF, \quad L = 50mH$

$e(t) = 20\sqrt{2}\sin(100t - 90^\circ)V$

$\omega = 100$

$E = 20e^{-j90^\circ}$

$Z_L = j5$

$Z_C = -j10$

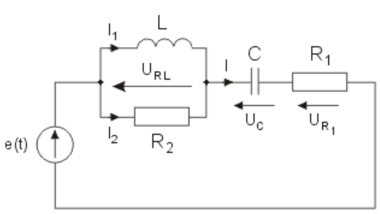
$Z_{RL} = 2{,}5 + 2{,}5j = 2{,}5\sqrt{2}e^{j45^\circ}$

$I \approx 1{,}37e^{-j59^\circ}$

$$U_{RL} = Z_{RL} I = 1{,}37 \cdot 2{,}5\sqrt{2}e^{j45^\circ} e^{-j59^\circ} = 4{,}84e^{-j14^\circ}$$

$$I_1 = \frac{U_{RL}}{Z_L} = \frac{4{,}84e^{-j14^\circ}}{5j} = \frac{4{,}84e^{-j14^\circ}}{5e^{j90^\circ}} 0{,}97e^{-j104^\circ}$$

$$I_2 = \frac{U_{RL}}{R_2} = \frac{4{,}84e^{-j14^\circ}}{5} = 0{,}97e^{-j14^\circ}$$



Przykład 2

$R_1 = 10\Omega, \quad R_2 = 5\Omega \quad C = 1mF, \quad L = 50mH$

$e(t) = 20\sqrt{2}\sin(100t - 90^\circ)V$

$\omega = 100$

$E = 20e^{-j90^\circ}$

$Z_L = j5$

$Z_C = -j10$

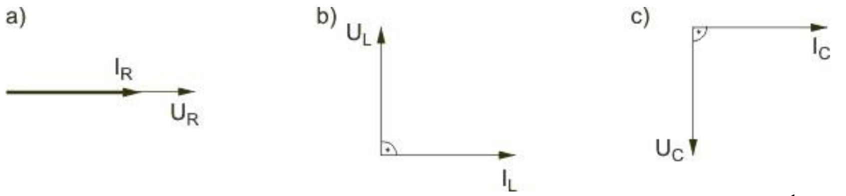
$I \approx 1{,}37e^{-j59^\circ}$

$$U_C = Z_C I = 1{,}37e^{-j59^\circ} \cdot (-j10) = 13{,}7e^{-j149^\circ}$$

$$U_R = R_1 I = 1{,}37e^{-j59^\circ} \cdot 10 = 13{,}7e^{-j59^\circ}$$

II prawo Kirchhoffa

wykres wektorowy, (wykres wskazowy) przedstawia (w sposób orientacyjny) zależności między poszczególnymi wektorami prądu i napięcia w obwodzie.



$$U_R = RI_R \qquad U_L = j\omega L I_L \qquad U_C = -j\frac{1}{\omega C} I_C$$

Moc w obwodzie prądu zmiennego

Moc chwilowa *p(t)* jest funkcją czasu i definiuje się ją jako iloczynu wartości chwilowych prądu oraz napięcia w obwodzie

$$u(t) = U_m \sin \omega t \qquad i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$p(t) = U_m I_m \sin(\omega t)\sin(\omega t + \varphi) = \frac{U_m I_m}{2}[\cos\varphi - \cos(2\omega t - \varphi)] =$$

$$= |U||I|\cos\varphi - |U||I|\cos(2\omega t - \varphi)$$

$$gdzie \quad |U| = \frac{U_m}{\sqrt{2}}, |I| = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

Moc czynną definiuje się jako wartość średnią z mocy chwilowej za okres

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T |U||I|[\cos\varphi - \cos(2\omega t - \varphi)]dt = |U||I|\cos\varphi$$

$\cos\varphi$ jest nazywany **współczynnikiem mocy**

Moc czynna jest maksymalna dla φ=0 a minimalna (równa 0) dla φ=+-π/2

Moc czynna wydzielana jest w obwodzie jedynie na rezystancji

W obwodzie o charakterze rezystywnym moc wydzielana jest równa $P = |I|^2 R$

Jednostką jest wat [W]

Moc w obwodzie prądu zmiennego

Moc bierna jest definiowana jako iloczyn napięcia i prądu oraz sinusa kąta przesunięcia fazowego między nimi

$$Q = |U||I|\sin\varphi$$

Jednostką jest **war**. Dla elementu o reaktancji X powyższe równanie może być napisane jako

$$Q = |U||I|\sin\varphi = X|I|^2 = \frac{1}{X}|U|^2$$

kąt przesunięcia fazowego uważa się za dodatni dla obwodów o charakterze indukcyjnym (napięcie wyprzedza prąd), a za ujemny dla obwodów o charakterze pojemnościowym (napięcie opóźnia się względem prądu). Moc bierna obwodów o charakterze indukcyjnym, kojarzona jest z liczbą dodatnią, a moc bierna obwodów o charakterze pojemnościowym - z liczbą ujemną.

Moc pozorną zespoloną definiuje się jako iloczyn wartości skutecznej napięcia i wartości skutecznej sprzężonej prądu

$$S = UI^*$$

Jednostką jest woltamper [VA]

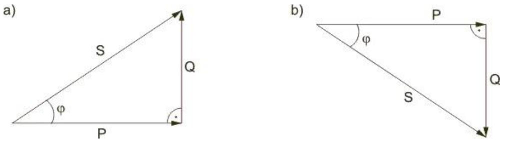
. $S = UI^* = P + jQ$

$moc \quad czynna$

$P = \mathrm{Re}(S) = |U||I|\cos\varphi$

$moc \quad bierna$

$Q = \mathrm{Im}(S) = |U||I|\sin\varphi$



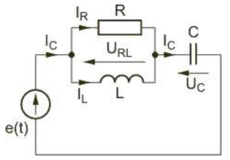
wykres mocy dla obwodu o charakterze indukcyjnym pojemnosciowym

Bilans mocy

Zasada bilansu mocy w obwodach elektrycznych mówi, że całkowita moc wydzielona w obwodzie = całkowitej mocy dostarczonej przez źródło

$$S_g = S_o$$

Przykład



$$R = 1\Omega, \quad C = 0{,}5F, \quad L = 1H \quad e(t) = 100\sqrt{2}\sin(1t + 45^\circ)V$$

$$E = 100e^{j45^\circ}$$

$$Z_L = j \quad Z_C = -2j$$

$$Z_{RL} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{j45^\circ}; Z = 1{,}58e^{-j71{,}6^\circ}; I_c = 63{,}3e^{j116{,}6^\circ}; U_c = 126{,}6e^{j26{,}6^\circ}$$

$$U_{RL} = 44{,}7e^{j161{,}6^\circ}; I_L = 44{,}7e^{j71{,}6^\circ}; I_R = 44{,}7e^{j161{,}6^\circ}$$

Moc pozorna zespolona = *2000-j6000* VA

Moc czynna na rezystorze = *2000 W*

Moc bierna cewki = *2000 var*

Moc bierna kondensatora = *-8000 var*

Całkowita moc bierna w obwodzie = *6000 var*

Prawa Kirchhoffa

Na kondensatorze idealnym ładowanym do napięcia U gromadzona jest energia. Jeżeli ma to miejsce w czasie od t_0 do t_1

$$W = \int_{t_0}^{t_1} p(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} u(t)i(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} u(t)C\frac{du(t)}{dt}dt$$

Jeżeli w chwili t_0 napięcie wynosi 0 a w t_1 *U* to

$$\boxed{\mathrm{W} = C\int_0^U udu = 1/2CU^2}$$

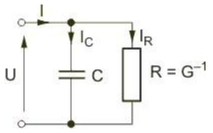
Podobnie dla cewki, jeżeli w chwili t_0 prąd wynosi 0 a w t_1 *I* to

$$W = \int_{t_0}^{t_1} p(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} u(t)i(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} i(t)L\frac{di(t)}{dt}dt$$

$$\boxed{\mathrm{W} = L\int_0^I idi = 1/2LI^2}$$

Prawa Kirchhoffa

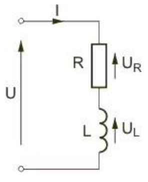
kondensator rzeczywisty posiada upływność



układ ten charakteryzuje dobroć Q_C definiowana jako

$$Q_C = \omega CR$$

Rzeczywista cewka posiada rezystancję

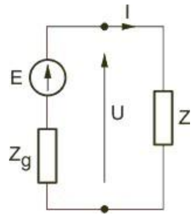


dobroć cewki definiowana jest jako

$$Q_L = \frac{\omega L}{R}$$

Warunek dopasowania

Rzeczywiste źródło posiada impedancję wyjściową $Z_g = R_g + jX_g$



Dopasowanie odbiornika o impedancji $Z = R + jX$ **do generatora** rozumiemy jako dobór takiej impedancji odbiornika przy której odbiornik pobiera ze źródła maksymalną moc czynną.

$$P = |I|^2 R = \frac{|E|^2}{|Z_g + Z|^2} R = \frac{|E|^2}{(R_g + R)^2 + (X_g + X)^2} R$$

P = max dla $X = -X_g$

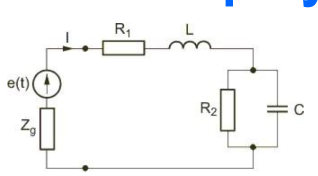
dla wyznaczenia R należy znaleźć ekstremum funkcji *P(R)* $\frac{dP(R)}{dR} = 0$

$$\frac{dP(R)}{dR} = 0 \Rightarrow \frac{(R_g + R)^2 - 2R(R_g + R)}{(R_g + R)^4} |E|^2 = \frac{R_g - R}{(R_g + R)^3} |E|^2 = 0$$

to znaczy $R = R_g$

ostatecznie $\boxed{Z = Z_g^* = R_g - jX_g}$

przykład



$R_2 = 20\Omega \quad X_C = 20\Omega, \quad Z_g = 50\Omega$

$e(t) = 100\sqrt{2}\sin tV$

$$Z = R_1 + jX_L + 10 - j10$$

$$\mathrm{Im}(Z_g) = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}(Z) = 0 \Rightarrow X_L = 10\Omega$$

$$\mathrm{Re}(Z_g) = \mathrm{Re}(Z) \Rightarrow R_1 = 40\Omega$$

$$I = \frac{E}{Z + Z_g} = \frac{100}{50 + 50} = 1$$

$$S_E = EI^* = 100$$

$$P = |I|^2 R = 50$$