Pomiary wielkości elektrycznych i nieelektrycznych

Niepewność pomiaru

Pomiary wielkości elektrycznych i nieelektrycznych

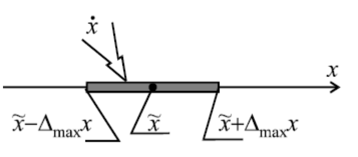
dokładność pomiaru

- Wynik pomiaru X jest znany z możliwa do określenia niepewnością

$$X_p - \Delta X \le X \le X_p + \Delta X$$

ΔX jest bledem bezwzględnym pomiaru

- Przedział $[X_p - \Delta, X_p + \Delta X]$ nazywany jest *przedziałem niepewności wyniku pomiaru*



Wynik pomiaru ma postać przedziału niepewności, wartość prawdziwa $\dot{x}$ leży wewnątrz przedziału .

Pomiary wielkości elektrycznych i nieelektrycznych

Błędy

- Błędy przyrządów pomiarowych
- Błędy metody pomiarowej
- Błędy obliczeń i przetwarzania danych pomiarowych
- Błędy obserwatora (błąd paralaksy oraz błąd dyskretyzacji odczytu analogowego)
- Błędy wynikają

Pomiary wielkości elektrycznych i nieelektrycznych

Błąd pomiaru

błąd pomiaru definiowany jako różnica między wynikiem pomiaru x i wartością prawdziwą x_0 wielkości mierzonej

- **błąd bezwzględny**

$$\Delta x = x - x_0$$

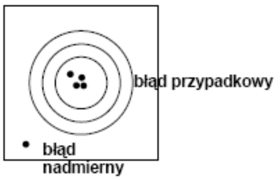
- **błąd względny**

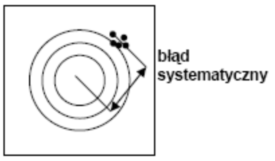
$$\delta = \frac{\Delta x}{x_0} 100\% = \frac{x - x_0}{x_0} 100\%$$

Pomiary wielkości elektrycznych i nieelektrycznych

Błędy

- Błąd przypadkowy
- Błąd systematyczne
- Błąd nadmierny





Pomiary wielkości elektrycznych i nieelektrycznych

Błędy

- **Błąd przypadkowy**
  - wartości błędów są różne w kolejnych pomiarach przeprowadzanych w warunkach powtarzalności.
  - Błąd przypadkowy jest zmienną losową, a w kolejnych pomiarach tej samej wielkości, wykonywanych w warunkach powtarzalności, otrzymuje się błędy o wartościach będących realizacjami tej zmiennej.
  - Szacowanie błędów przypadkowych jako miary rozproszenia wyników wokół wartości prawdziwej dokonuje się *metodami rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej.*
  - Błąd przypadkowy wyniku pomiaru nie może być skompensowany przez poprawkę, ale może być zmniejszony przez wielokrotne powtarzanie pomiarów

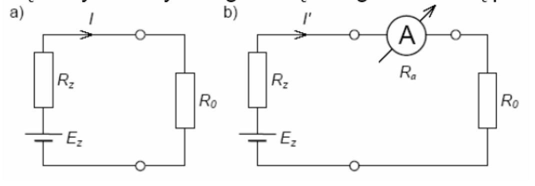
$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Pomiary wielkości elektrycznych i nieelektrycznych

Błędy

- **Błąd systematyczny**
  - Powstaje skutkiem systematycznych oddziaływań wielkości wpływających. W kolejnych pomiarach wykonywanych w jednakowych warunkach błąd systematyczny ma wartość stałą. Przy zmianie warunków zmienia się z określoną prawidłowością, którą można wyznaczyć analitycznie.
  - Przykładem są błędy systematyczne spowodowane przesunięciem skali miernika , błędem wzorca (np. różną od nominału masą odważnika), pomijaniem czynników wpływających na wyniki pomiaru (np. rezystancji przewodów przy pomiarze małych rezystancji)\
  - Można je wyeliminować wprowadzając odpowiednią poprawkę. Wynik pomiaru przed korekcją błędu systematycznego nazywa się **wynikiem surowym**, a po korekcji **wynikiem poprawionym**.
  - błąd systematyczny nie jest znany dokładnie. Wyznaczona poprawka jest obarczona zatem niepewnością, która staje się jednym ze składników całkowitej niepewności pomiaru.

Przykład błędu systematycznego związanego z metodą pomiarową



Pomiar prądu w obwodzie elektrycznym złożonym ze źródła napięcia i obciążenia:
a) obwód pierwotny; b) obwód pomiarowy po włączeniu amperomierza

Włączenie do obwodu amperomierza powoduje zmianę warunków pracy obwodu i prądu płynącego w obwodzie

$$\Delta I = I' - I$$

gdzie: $I = \dfrac{E_z}{R_0 + R_z}$ $\quad I' = \dfrac{E_z}{R_0 + R_z + R_a}$

Spowoduje to powstanie błędu względnego

$$\delta_I = \frac{\dfrac{1}{R_0 + R_z + R_a} - \dfrac{1}{R_0 + R_z}}{\dfrac{1}{R_0 + R_z + R_a}} = -\frac{R_a}{R_0 + R_z}$$

Błąd ten będzie mało istotny przy spełnieniu warunku $R_a \ll R_o + R_z$

Można również wyznaczyć odpowiednią poprawkę i skorygować wynik

$$p_I = -\Delta I = \frac{E_z R_a}{(R_0 + R_z)(R_0 + R_z + R_a)}$$

Błąd nadmierny

- **Błąd nadmierny,** zwany również **omyłką** lub **błędem grubym**
  - Powoduje jawne zniekształcenie wyniku pomiaru.
  - Najczęstsze przyczyny:
    - nieprawidłowy odczyt lub błędny zapis wyniku pomiaru,
    - zastosowanie niewłaściwego przyrządu lub pomiar przyrządem uszkodzonym

Błąd przypadkowy

- Błąd przypadkowy nie może być skompensowany przez poprawkę, ale może być zmniejszony przez wielokrotne powtarzanie pomiarów, a dokładniej przez wykonanie serii *n* pomiarów i przyjęcie jako wyniku końcowego średniej arytmetycznej serii wyników x_i.

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_i$$

- Ilościową miarą niedokładności pomiaru, której odzwierciedlenie stanowi rozrzut wyników jest *niepewność pomiaru*.

Błąd przypadkowy

- *przedziałem niepewności (ufności)* wyniku pomiaru jest przedział na osi liczbowej, wewnątrz którego z pewnym prawdopodobieństwem znajduje się wartość prawdziwa.
- *Poziom ufności* (p_α) - jest prawdopodobieństwem tego, że w przedziale niepewności wyniku pomiaru znajduje się wartość prawdziwa

$$p_\alpha = P\{x_0 \in (x-U, x+U)\}$$

Pomiary wielkości elektrycznych i nieelektrycznych

Warunki pomiaru

norma PN-92/E-06501/01 określa następujące tolerancje dla wielkości wpływających:

- temperatura otoczenia:
  - $23^oC \pm 10C$ dla przyrządów o wskaźniku klasy ≤ 0,3
  - $23^oC \pm 20C$ dla przyrządów o wskaźniku klasy ≥ 0,5
- wilgotność względna 40 - 60%
- pozycja pracy oznaczona(pozioma lub pionowa) $\pm 1^o$
- zewnętrzne pole magnetyczne: całkowity brak
- zewnętrzne pole elektryczne: całkowity brak

Opracowanie wyników pomiarów. Zasady.

- Obliczenia powinny być przeprowadzane na danych (wynikach pomiarów) podawanych z ich największą dokładnością.
- Wszystkie obliczenia przeprowadzane na danych: mnożenie, dzielenie, potęgowanie itd. należy wykonywać do co najmniej dwóch cyfr znaczących więcej niż zawierały pierwotne dane. Nie należy wykonywać zaokrągleń, dopóki nie uzyska się ostatecznego wyniku obliczeń.
- Przy mnożeniu i dzieleniu wynik należy podawać z taką samą liczbą cyfr znaczących, jaką zawiera wynik pomiaru o najmniejszej liczbie cyfr znaczących wzięty do obliczeń

przykład

$$R = \frac{U}{I} = \frac{3{,}15V}{1{,}33mA} = 2{,}368421052\ \mathrm{k\Omega}$$

$$R = \frac{U}{I} = \frac{3{,}15V}{1{,}33mA} = 2{,}37\ \mathrm{k\Omega}$$

Opracowanie wyników pomiarów. Zasady.

- **Zapis wyniku pomiaru** powinien umożliwiać ocenę dokładności z jaką została określona wartość wielkości mierzonej. W tym celu podaje się jednocześnie z wynikiem pomiaru x wartość błędu Δx

  $\boxed{x_p = x \pm \Delta x}$

  gdzie x_p jest poprawną wartością wielkości *x*.
- Zaleca się **obliczanie błędu** zgodnie z następującymi zasadami:
  - wartość liczbową błędu należy zaokrąglać "w górę" i zapisywać liczbą o jednym miejscu znaczącym, np.: 2; 0,02;
  - zapis błędu pomiaru w postaci dwu cyfr znaczących jest zalecany w pomiarach dokładnych oraz wówczas, gdy wskutek zaokrąglenia do jednej cyfry znaczącej wartość błędu zwiększyłaby się więcej niż o 10% .
- Wynik pomiaru oblicza się z jednym miejscem dziesiętnym więcej niż to, na którym zaokrąglono błąd, po czym zaokrągla go się (zgodnie z regułą zaokrąglania liczb) tak, aby ostatnia cyfra wyniku odpowiadała miejscem wartości liczbowej błędu, np.: (121±1) cm, (19,45±0,13) mA.

Opracowanie wyników pomiarów. Zasady

pomiar za pomocą przyrządu.

- jeżeli pomiar przeprowadzany jest za pomocą przyrządu o znanej dokładności niecelowym jest wykonywanie serii pomiarów gdyż bledy przypadkowe będą małe w porównaniu z błędami systematycznymi przyrządu.
- W przypadku miernika wskazówkowego niedokładność określa klasa miernika
- W przypadku miernika cyfrowego niedokładność określa suma niedokładności względnej odczytanej (rdg) i niedokładności względnej zakresu (FS) miernika.

przyrządy pomiarowe – klasa dokładności miernika

Klasa dokładności *k* przyrządu jest granicznym błędem bezwzględnym wyrażonym w procentach długości zakresu.

$$k = \frac{\Delta_{max}x}{X_{max}} \cdot 100$$

$\Delta_{max}x$ błąd bezwzględny

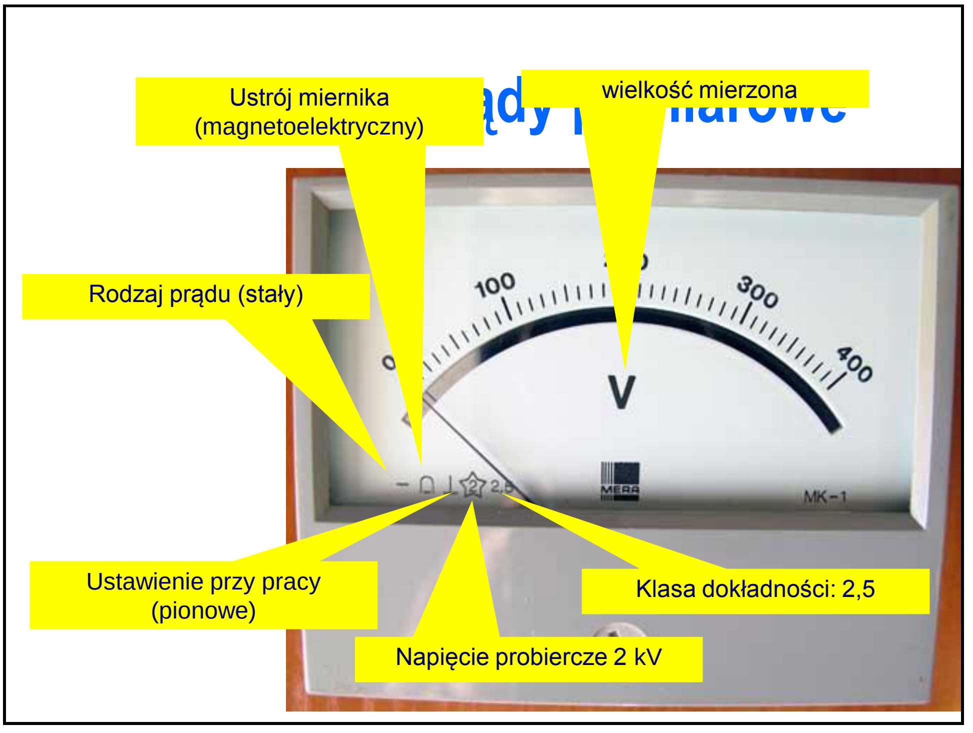
X_{max} zakres miernika

Norma polska PN 84/E 06501 *Mierniki elektryczne analogowe o działaniu bezpośrednim i ich przybory* ustala następujące klasy dokładności:

0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1; 1,5; 2,5 ;5

Klasę dokładności podaje się na skali przyrządu.

- kl. 0,1 0,2 - Przyrządy wzorcowe
- kl. 0,5 - Przyrządy laboratoryjne
- kl. 1 1,5 - Przyrządy do pomiarów przemysłowych
- kl. 2,5 5 - Przyrządy orientacyjne (wskaźnikowe)



Przykład - Pomiar za pomocą przyrządu wskazówkowego

- Woltomierz analogowy o klasie dokładności 1 wskazał na zakresie 100V 25V.

klasa miernika określana jest jako

$$\frac{\Delta X_{\max}}{X_{\max}} \cdot 100 \qquad \Delta X_{\max} - \textit{dopuszczalna niedokładność bezwzględna}$$
$$X_{\max} - zakres$$

Graniczny bezwzględny błąd pomiaru wynosi $\Delta U_{\max} = 0{,}01 \cdot 100V = 1V$

Wynik pomiaru to $\boxed{25 \pm 1V}$

Błąd względny wynosi 4%

Zauważmy, że jeżeli pomiaru dokonamy na zakresie 30V, **błąd bezwzględny wyniesie 0,3V a względny 1,2%.**

Pomiaru należy dokonywać zawsze na górnej części odpowiedniego zakresu.

Opracowanie wyników pomiarów

pomiar za pomocą przyrządu cyfrowego..

- Dla przyrządów cyfrowych graniczny błąd pomiaru (wskazania) określa się zwykle jako sumę błędu δ_R podanego w procentach od wartości mierzonej (wskazanej) i błędu wynikającego z braku pewności co do *n ostatnich jednostek (kwantów) wskazania cyfrowego.*
- Ten drugi składnik błędu granicznego jest zwany błędem od długości zakresu $X_{\max}$ *i czasem* jest podawany w procentach jako δ_{FS} $(\delta_{FS} = 100n / N_{\max})$

Często ***graniczny błąd*** *przyrządu* cyfrowego zapisuje się stosując nazwy angielskie

a) δ_R *% rdg + n dgt* *lub b)* δ_R *% rdg +* δ_{FS} *%.*

Opracowanie wyników pomiarów

pomiar za pomocą przyrządu cyfrowego..

- Graniczny błąd bezwzględny pomiaru i graniczny błąd względny pomiaru dla tak opisanego miernika cyfrowego wynoszą odpowiednio

$$\Delta X_{\max} = \pm(\frac{N}{100}\delta_R + n)q \quad \text{i} \quad \delta_{\max} = \pm(\delta_R + \frac{n}{N}100)\% \quad \text{dla a)}$$

Lub dla b)

$$\Delta X_{\max} = \pm(N\delta_R + N_{\max}\delta_{FS})\frac{q}{100} \quad i \quad \delta_{\max} = \pm(\delta_R + \frac{N_{\max}}{N}\delta_{FS})\%$$

Gdzie N – wskazanie cyfrowe wartości mierzonej bez uwzględniania przecinka

q – kwant miernika

Przykład - pomiar za pomocą przyrządu cyfrowego

- Woltomierz czterocyfrowy o błędzie $\delta_R = 0{,}05\%$ rdg + n=5 dgt (i o dekadowo zmienianych zakresach) wskazał na zakresie 10 V: 9,837 V

dopuszczalna niedokładność bezwzględną dla miernika cyfrowego liczy się ze wzoru

$$\Delta X_{\max} = \pm\left(\frac{N}{100}\delta_R + n\right)q \qquad X_{\max} - zakres$$

N – wskazanie cyfrowe wartości mierzonej bez uwzględniania przecinka

Zakres wskazań cyfrowych woltomierza wynosi $N_{max} = 10^4$ *V*, wartość jego ostatniej cyfry, czyli *kwant* $q = 10^{-3}$ *V*

$$\Delta U_{max} = \left(\frac{9837}{100}\cdot 0{,}05 + 5\right)\cdot 10^{-3}V = 9{,}919\cdot 10^{-3}$$

Ostatecznie $U = 9{,}837 \pm 0{,}01V$

Błąd względny wynosi ok. 0,1%

Przykład – multometr cyfrowy SAF 350E z automatyczną zmianą zakresu pomiarowego

FUNCTION	RANGE	RESOLUTION	ACCURACY
DC mV	400mV	100 μV	±(0.3% rdg + 2 digits)
DC VOLTAGE (V DC)	4V 40V 400V	1mV 10mV 100mV	±(0.3% rdg + 1 digit)
	1000V	1V	±(0.5% rdg + 2 digits)
AC VOLTAGE (V AC)	4V 40V 400V	1mV 10mV 100mV	±(0.8% rdg + 3 digits)
	750V	1V	±(1.2% rdg + 5 digits)
DC CURRENT (A DC)	400 μA 4000 μA 40mA 400mA	0.1 μA 1 μA 10 μA 100 μA	±(0.5% rdg + 2 digits)
	4A 20A	1mA 10mA	±(1.0% rdg + 5 digits)
AC CURRENT (A AC)	400 μA 4000 μA 40mA 400mA	0.1 μA 1 μA 10 μA 100 μA	±(0.8% rdg + 5 digits)
	4A 20A	1mA 10mA	±(1.5% rdg + 10 digits)
RESISTANCE	400 Ω	0.1 Ω	±(0.8% rdg + 2 digits)
	4k Ω 40k Ω 400k Ω 4M Ω	1 Ω 10 Ω 100 Ω 1k Ω	±(0.5% rdg + 2 digits)
	40M Ω	10k Ω	±(1.0% rdg + 10 digits)
CAPACITANCE	100nF to 100 μF	10pF	±(3.0% rdg + 10 digits)
	100 μF to 400 μF	1 μF	±(5.0% rdg + 10 digits)
TEMPERATURE	-40°F to 1999°F	1°F	±(3.0% rdg + 5 digits)
	-40℃ to 1000℃	1℃	
FREQUENCY	40Hz to 1kHz	1Hz	±(1.0% rdg + 5 digits)
	1kHz to 2MHz	1Hz	±(0.3% rdg + 1 digit)

ANALIZA STATYSTYCZNA WYNIKÓW POMIARÓW

Pomiary wielkości elektrycznych i nieelektrycznych

Błąd przypadkowy

W analizie niepewności pomiaru metodami probabilistycznymi (rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej) zakłada się, iż wyniki pomiarów są skorygowane i mogą być modelowane zmienną losową x. Najlepszym opisem zmiennej losowej ciągłej jest rozkład gęstości prawdopodobieństwa *p(x).* Zmienna ta ma własność opisaną wzorem poniżej

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x)dx = P\{x \in (x_1, x_2)\}$$

środek zgrupowania wyników pomiarów charakteryzuje *wartość oczekiwana* zmiennej losowej

$$\mu = E(\underline{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

Dla skończonej ilości pomiarów wartość oczekiwana jest równa *średniej arytmetycznej*

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Estymatorem (oszacowaniem) wartości rzeczywistej jest w takim przypadku ta średnia arytmetyczna

Pomiary wielkości elektrycznych i nieelektrycznych

Błąd przypadkowy

Miarą rozrzutu wyników pomiarów jest *odchylenie standardowe*

$$\sigma_x = \sqrt{E\left[(\underline{x}-\mu)^2\right]}$$

Dla skończonej liczby pomiarów odchylenie standardowe jest równe

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

Pomiary wielkości elektrycznych i nieelektrycznych

Błąd przypadkowy

Średnia arytmetyczna serii pomiarów też jest zmienną losową

Odchylenie średniokwadratowe średniej arytmetycznej charakteryzuje rozrzut wartości średniej, czyli wartości uzyskanych w wyniku przeprowadzenia w tych samych warunkach nowych, tak samo licznych serii pomiarów.

$$\sigma_{av} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

Pomiary wielkości elektrycznych i nieelektrycznych

Błąd przypadkowy

Dla serii pomiarowych liczących kilkanaście do kilkudziesięciu wyników zakłada się, że zmienna losowa będąca wynikiem wykonanych pomiarów ma rozkład *t Studenta.* Mając trzy wcześniej policzone wielkości (średnią, odchylenie standardowe i odchylenie średniokwadratowe) można określić prawdopodobieństwo, z jakim wartość rzeczywista znajduje się w przedziale

$$(\bar{x} - k\sigma_{av}, \bar{x} + k\sigma_{av})$$

lub przedział, w jakim się znajduje z zadanym prawdopodobieństwem. Współczynnik *k* oznaczany jest przez $t_{\alpha;n-1}$, gdzie α jest *poziomem ufności* (prawdopodobieństwem), a $n-1$ *liczbą stopni swobody* (n jest licznością próbki). Wartość współczynnika $t_{\alpha;n-1}$ odczytuje się z tablic statystycznych .

opracowanie wyników pomiarów Przykład.

pewne niepięcie zostało zmierzone 16-krotnie

- Wartość średnia = 50,0V
- Odchylenie standardowe =0,8V

W jakim przedziale z prawdopodobieństwem 99% znajdzie się wartość średnia kolejnej, tak samo licznej serii pomiarów przeprowadzonej w tych samych warunkach?

odchylenie średniokwadratowe średniej arytmetycznej

$$\sigma_{av} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0,8}{\sqrt{16}} = 0,2V$$

Odszukujemy w tablicy współczynników t dla rozkładu t-Studenta współczynnik odpowiadający wartościom $\alpha = 0,99 \; i \; n-1 = 15$

$$t_{0,99;15} = 2,947$$

Połowa szerokości przedziału ufności wyniesie zatem

$$\Delta U = t_{0,99;15} \cdot \sigma_{av} = 2,947 \cdot 0,2 = 0,5894V \approx 0,59V$$

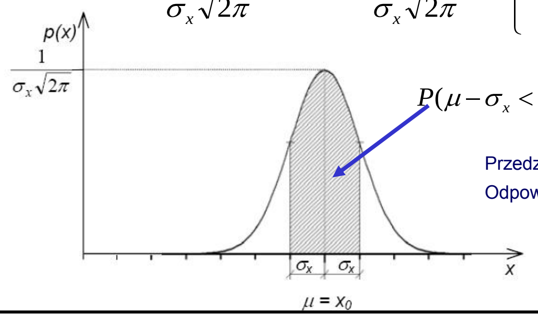
Wynik pomiaru: $\boxed{50,0\mathrm{V} \pm 0,6\mathrm{V}}$

Pomiary wielkości elektrycznych i nieelektrycznych

Błąd przypadkowy

Dla większości sytuacji spotykanych w praktyce wyniki pomiarów mogą być modelowane zmienną losową o rozkładzie normalnym, nazywanym też rozkładem Gaussa

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_x^2}} = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{2\sigma_x}\right)^2\right\}$$



$$P(\mu - \sigma_x < \underline{x} < \mu + \sigma_x) = \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} p(x)dx = 0{,}682$$

Przedziałom dwukrotnie i trzykrotnie szerszym Odpowiadają poziomy ufności 0,954 i 0,997

Pomiary wielkości elektrycznych i nieelektrycznych

Błąd przypadkowy

- Gdy nieznane są oba parametry rozkładu zmiennej losowej $\underline{x}$ modelującej pomiar (μ = ?, σ_x = ?) trzeba je szacować na podstawie wyników serii pomiarów korzystając z metod statystyki matematycznej.
- Przy odpowiednio dużej ilości pomiarów (n>30) wyniki można traktować jako zmienną losową o rozkładzie normalnym

Za najbardziej prawdopodobną wartość *x* (estymator wartości oczekiwanej) przyjmuje się średnią arytmetyczną z serii pomiarów

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

W zależności od liczby pomiarów w serii oszacowanie granicznego przedziału ufności wyniku przeprowadza się albo za pomocą rozkładu Gaussa albo Studenta. Dla Gaussa $\pm\Delta\bar{X} = \pm 3\sigma_{av}$